

Temperaturbeanspruchte Stahlbetonschalen
im gerissenen Zustand

Doktorarbeit
zur
Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der
Abteilung für Bauingenieurwesen
der Ruhr-Universität Bochum

von
Günter Schmidt
Gelsenkirchen

Bochum 1981

Temperaturbeanspruchte Stahlbetonschalen
im gerissenen Zustand

Doktorarbeit

zur

Erlangung des Grades

Doktor-Ingenieur

der

Abteilung für Bauingenieurwesen

der Ruhr-Universität Bochum

von

Günter Schmidt

Gelsenkirchen

Bochum 1981



Doktorarbeit eingereicht am: 19.06.1981

Tag der mündlichen Prüfung : 10.12.1981

Berichter:

Prof.Dr.-Ing.Dr.-Ing. E.h. Wolfgang Zerna

Prof. Günther Schmid, Ph.D.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1979 bis 1981 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum.

Die Anregung zu dieser Arbeit erhielt ich durch die Zusammenarbeit mit Herrn Professor W. Zerna. Ihm möchte ich an dieser Stelle für die ständige Unterstützung und Förderung dieser Arbeit recht herzlich danken.

Ebenso danke ich Herrn Professor G. Schmid für die Förderung dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferates.

Dankenswerterweise stellte Herr Professor W.B. Krätzig das Rechenprogramm FEMAS zur Verfügung.

Finanziell wurde diese Arbeit teilweise durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Forschungsvorhabens "Stahlbetonschalen unter Temperaturbeanspruchung" gefördert.

Bochum, Dezember 1981

Günter Schmidt

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
1. <u>Einleitung</u>	1
1.1 Stand der Erkenntnisse	1
1.1.1 Materialverhalten des Stahlbetons unter Temperatur	1
1.1.2 Nichtlineare Analyse von Stahl- betontragwerken	2
1.2 Problemstellung	4
1.2.1 Gegenstand der Untersuchung	4
1.2.2 Ziel der Untersuchung	4
1.2.3 Methode der Untersuchung	5
1.3 Theoretische Grundlagen	6
2. <u>Materialgesetz für Stahlbeton unter Temperatureinfluß</u>	8
2.1 Allgemeines	8
2.2 Beton	14
2.2.1 Mechanische Eigenschaften	14
2.2.1.1 Betondruckfestigkeit	16
2.2.1.2 Betonzugfestigkeit	21
2.2.1.3 Elastizitätsmodul	23
2.2.2 Thermische Dehnung	26
2.2.3 Bruchhypothese	30
2.2.4 Spannungs-Dehnungs-Beziehung	32
2.2.4.1 Elastischer Beton	32
2.2.4.2 Gerissener Beton	34
2.3 Stahl	36
2.3.1 Mechanische Eigenschaften	36
2.3.1.1 Streckgrenze	37
2.3.1.2 Zugfestigkeit	38
2.3.1.3 Elastizitätsmodul	40
2.3.2 Thermische Dehnung	40
2.3.3 Spannungs-Dehnungs-Beziehung	41
2.3.3.1 Elastischer Stahl	41
2.4 Verbundbaustoff Stahlbeton	43

3.	<u>Finite-Element-Beschreibung</u>	45
3.1	Allgemeines	45
3.2	Scheibenelement	45
3.2.1	Definitionen und Voraussetzungen	45
3.2.2	Verschiebungsansatz	46
3.2.3	Verzerrung-Verschiebungs-Beziehung	47
3.2.4	Steifigkeitsmatrix	48
3.2.5	Lastvektoren	49
3.3	Plattenelement	50
3.3.1	Definitonen und Voraussetzungen	50
3.3.2	Verschiebungsansatz	51
3.3.3	Verkrümmungs-Verschiebungs- Beziehung	54
3.3.4	Elementsteifigkeitsmatrix	56
3.3.5	Lastvektoren	57
3.4	Schalenelement	57
3.4.1	Allgemeines	57
3.4.2	Geometrische Beschreibung des Schalenelementes	59
3.4.3	Transformation der Elementmatrizen	64
3.5	Geschichtetes Element	66
3.5.1	Voraussetzungen	66
3.5.2	Ableitung der Elementsteifigkeits- matrix	67
3.5.3	Ableitung der Knotenlastvektoren	71
3.5.4	Ableitung der Spannungen	74
4.	<u>Nichtlineare Rechnung</u>	76
4.1	Allgemeines	76
4.2	Numerisches Verfahren	76
4.3	Rechenprogramm	81

5.	<u>Beispiele</u>	
5.1	Allgemeines	85
5.2	Testrechnungen	86
5.2.1	Stahlbetonbalken unter Einzellast	86
5.2.2	Stahlbetonbalken unter linearer Temperaturverteilung	91
5.2.3	Stahlbetonbalken unter nicht- linearer Temperaturverteilung	95
5.2.4	Stahlbetonplatte unter Einzellast	98
5.3	Berechnung temperaturbeanspruchter Schalentragwerke	103
5.3.1	Behälter unter hohen Temperaturen	106
5.3.2	Behälter unter hohen Temperaturen und Innendruck	119
5.3.3	Behälter unter tiefen Temperaturen	126
5.4	Parameteruntersuchungen	136
5.4.1	Behälterausschnitt unter hohen Temperaturen	139
5.4.2	Behälterausschnitt unter tiefen Temperaturen	146
5.4.3	Behälterausschnitt unter tiefen Temperaturen bei Wasserlagerung	151
5.4.4	Behälterausschnitt unter hohen Temperaturen und Innendruck	156
6.	<u>Abschließende Betrachtungen</u>	159
6.1	Zusammenfassung	159
6.2	Ergebnisse	160
	<u>BEZEICHNUNGEN</u>	163
	<u>LITERATURVERZEICHNIS</u>	167

1. Einleitung

1.1 Stand der Erkenntnisse

Die stetige Zunahme von Tragwerken aus Stahlbeton läßt das Interesse an dem Verhalten dieses Werkstoffes und an den Berechnungsmethoden zur Untersuchung von Stahlbetonkonstruktionen stark anwachsen.

In den letzten Jahren wurde speziell der Frage nach dem Werkstoffverhalten von Stahlbeton unter Berücksichtigung des Einflusses von Rißbildung, Fließen der Bewehrung, Verbund, zweiachsigem Beanspruchungszustand und der daraus resultierenden nichtlinearen Analyse von Gesamtkonstruktionen nachgegangen. Das Bestreben, den Baustoff Stahlbeton für besondere Anwendungszwecke in der Technik, bei denen kurzfristig oder fortwährend mit großen Temperaturbeanspruchungen zu rechnen ist, einsetzen zu können, ist Ursache für das zur Zeit bestehende Interesse an dem Temperaturverhalten dieses Werkstoffes und der sich daraus ergebenden Beanspruchung von Schalentragwerken.

1.1.1 Materialverhalten des Stahlbetons unter Temperatur

In letzter Zeit sind eine ganze Reihe von experimentellen und theoretischen Untersuchungen zur Klärung des Materialverhaltens von Stahlbeton unter dem Einfluß hoher Temperaturen bis zu 1000 °C be-

kannt geworden. Auf der Grundlage der Arbeiten von FISCHER /1/, HARMATHY /2/, SCHNEIDER /3/ et al. schufen KLINGSCH /4/ und HAKSEVER /5/ im Rahmen ihrer Untersuchungen über das Brandverhalten von Stahlbetonkonstruktionen erste mathematische Ansätze für einachsige temperaturabhängige Spannungs-Dehnungs-Gesetze und zeigten deren numerische Anwendung.

Über die Temperatureigenschaften von Beton und Stahl im Bereich von Raumtemperatur bis zu ca. -200°C liegen dagegen kaum Erkenntnisse vor. Ergebnisse über die Festigkeits- und Verformungseigenschaften von Beton unter tiefen Temperaturen wurden erstmals von LENTZ/MONFORE /6/ und MOSKVIN et al. /7/ vorgelegt, auf die auch WISCHERS/DAHMS /8/ und KORDINA/NEISECKE /9/ verweisen. Daneben wurden vor allem von HELLER/STOLTE /10/ Arbeitslinien für Stahl bei tiefen Temperaturen ermittelt, die sich jedoch auf wenige spezielle Spannstähle beschränken. Untersuchungen mit dem Ziel, für Stahlbeton eine funktionale Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen im Bereich niedriger bis sehr tiefer Temperaturen zu formulieren, sind bislang noch in keiner Arbeit bekannt geworden.

1.1.2 Nichtlineare Analyse von Stahlbetontragwerken

Erst die Entwicklung geeigneter leistungsfähiger Rechenanlagen ermöglichte es in jüngster Vergangenheit, das Tragverhalten von Stahlbetonkonstruktionen rechnerisch zu erfassen und vorherzusagen. Die dabei verwendeten numerischen Verfahren basie-

ren überwiegend auf der Methode der finiten Elemente. Man unterscheidet grundsätzlich zwei Formulierungen: bei der einen wird das Materialgesetz für den integrierten Werkstoff Stahlbeton beschrieben und die Steifigkeiten aus einer Momenten-Krümmungs-Beziehung ermittelt, das andere Finite-Element-Verfahren geht vom sogenannten "Schichtenmodell" aus. Erste Untersuchungen stammen von HAND/PECKNOLD/ SCHNOBRICH /11/ und LINK/MEHLHORN/SCHÄFER /12/, die die Grundlagen für die weitere Entwicklung schufen. Eine Übersicht über die vorliegenden Erfahrungen geben WEGNER /13/ und EIBL/IVANYI /14/.

Über die Analyse von Schalentragswerken liegen verhältnismäßig wenige theoretische Arbeiten vor. HAND/PECKNOLD/SCHNOBRICH /11/ wandten das Schichtenmodell erfolgreich auf Schalen an und erzielten eine gute Übereinstimmung von Experiment und Rechnung. LIN /15/ untersuchte eine Zylinderschale und eine hyperbolische Paraboloidschale mit ebenen geschichteten Elementen. KABIR /16/ erweiterte diese Arbeit, indem er zeitabhängige Verformungen von Schalen berechnete. Auch MÜLLER /17/ führte Untersuchungen unter Berücksichtigung des Einflusses von Kriechen und Schwinden auf der Grundlage der Ansätze von LIN /15/ und KABIR /16/ durch.

Über hier interessierende Finite-Element-Analysen zur Beschreibung von thermischen Spannungen und Verformungen aufgrund beliebiger Temperaturverteilungen über dem Querschnitt ist bislang nur eine Veröffentlichung von RAHMAN/KALANKAMARY /18/ bekannt geworden, die schiefe Plattenbalkenbrücken mit einem dafür hergeleiteten Rechteckelement untersuchen.

1.2 Problemstellung

1.2.1 Gegenstand der Untersuchung

Die Methoden zur Berechnung von Stahlbetontragwerken im gerissenen Zustand sind in den letzten 6 bis 7 Jahren zwar in zahlreichen Untersuchungen weiterentwickelt worden, jedoch wurden Schalentragswerke nur in begrenztem Umfang untersucht. Auch liegen kaum Erfahrungen über das Temperaturverhalten von Stahlbeton und der daraus resultierenden Beanspruchung für Schalenkonstruktionen vor.

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung soll deshalb sein, speziell der noch offenen Frage nach den Auswirkungen einer beliebigen Temperaturverteilung über dem Querschnitt und der Rißbildung auf den Verformungs- und Spannungszustand von Stahlbetonschalen nachzugehen. Dabei muß der Formulierung des temperaturabhängigen Materialverhaltens in dem Stoffgesetz besondere Beachtung geschenkt werden. Die Untersuchung beschränkt sich nicht nur auf einen bestimmten Temperaturbereich, sondern umfaßt den Bereich sehr tiefer bis hoher Temperaturen von -200°C bis $+200^{\circ}\text{C}$, da Arbeiten, die das Temperaturverhalten von Stahlbeton auf breiter Basis klären, bisher nicht vorliegen.

1.2.2 Ziel der Untersuchung

Das Ziel dieser Arbeit ist, eine wirklichkeitsnahe Modellvorstellung für die Zwangsbeanspruchung von

Schalentragwerken infolge Temperatur zu entwickeln, auf deren Grundlage ein umfassendes Rechenprogramm erarbeitet wird. Das Rechenprogramm soll so aufgebaut werden, daß bei möglichst wirklichkeitsgetreuer Beschreibung der thermischen und elastischen Werkstoffkenngrößen mögliche beliebige Temperaturgradienten unter erhöhten und tiefen Temperaturen simuliert werden können. Damit sollen systematische parametrische Untersuchungen durchgeführt werden, die zur Klärung des physikalisch nichtlinearen Trag- und Verformungsverhaltens von allgemeinen Schalen beitragen und aus deren Ergebnissen letztlich ein baupraktischer Nutzen für die Bemessung und Ausführung von Stahlbetonkonstruktionen gezogen werden kann.

1.2.3 Methode der Untersuchung

Als geeignetes und vielversprechendes Verfahren zur Lösung der gestellten Aufgabe erweist sich die Methode der finiten Elemente. Mit ihr kann dem nichtlinearen Materialverhalten von Stahlbeton gut Rechnung getragen werden, weil ein Lösungsprozeß angewendet werden kann, der sich mathematisch und programmtechnisch in einfacher Weise formulieren läßt. Für die finite Übersetzung eignet sich besonders das Schichtenmodell, weil bei diesem Verfahren der Querschnitt des Tragwerkes in mehrere übereinanderliegende, scheibenartige Elemente zerlegt wird. Es sind somit nur die Stoffgesetze für den ebenen Spannungszustand zu formulieren, deren Herleitung auf der Grundlage von Versuchsergebnissen und bereits entwickelter Ansätze getroffen wird.

Zur Überprüfung der theoretischen Erkenntnisse und des aufgestellten Programms sollen einige exemplarische Beispiele berechnet werden, um die Effektivität des Modells zu demonstrieren.

1.3 Theoretische Grundlagen

Die Berechnung von dünnen Stahlbetonschalentragwerken wurde in der Vergangenheit vornehmlich auf der Grundlage der technischen Schalentheorie vorgenommen, deren Formulierung nach Gesetzen der Elastomechanik zu partiellen Differentialgleichungen führt. Die Grundgleichungen der Schalentheorie werden dabei aufgestellt, indem das dreidimensionale Kontinuum unter einer Reihe von Hypothesen auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt wird. In diesem Zusammenhang sei auf umfangreiche Literatur, z.B. GREEN/ZERNA /19/, ZERNA /20/, /21/, KRÄTZIG /22/ u.a. verwiesen. Geschlossene Lösungen der klassischen Schalentheorie existieren jedoch nur in wenigen Fällen unter besonderer Belastung und einfachen Randbedingungen.

Dank des Fortschritts bei der Entwicklung leistungsfähiger Rechenanlagen traten numerische Verfahren, wie z.B. die Methode der finiten Elemente, in den Vordergrund, deren theoretische Grundlagen in Arbeits- und Variationsprinzipien formulierbar sind, aber auch aus dem übergeordneten Prinzip der gewichteten Residuen hergeleitet werden können, wie bei SCHMID /47/ dargestellt. Im ersten Fall werden anstelle der Differentialgleichungen eines elastomechanischen Problems Integralausdrücke für

die Energie eines Tragwerks aufgestellt und durch algebraische Gleichungen in Abhängigkeit diskreter Werte ausgedrückt. Die geschichtliche Entwicklung sowie die Grundlagen dieser analytischen Methode werden z.B. von SCHRADER /50/ ausführlich dargestellt. Eine systematische Übersicht zu dem hier bearbeiteten Themengebiet findet man auch bei HARBORD /23/.

2. Materialgesetz für Stahlbeton unter Temperatureinfluß

2.1 Allgemeines

Die Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens von Bauteilen und Bauwerken aus Stahlbeton setzt eine genaue Kenntnis der Materialeigenschaften von Beton und Stahl voraus.

Über das ein- und zweiachiale Spannungs- und Bruchverhalten von Beton liegen verhältnismäßig zahlreiche experimentelle Untersuchungen vor, die die Grundlagen für die Formulierung von Stoffgesetzen bildeten. Die ersten Beschreibungen der σ - ϵ -Linien für den einachsigen Druckzustand werden von BACH (vgl. POPOVICS /24/) und YOUNG /25/ angegeben. Hierbei handelt es sich um mathematische Ansatzfunktionen, die später kaum übernommen wurden. Statt dessen verwenden die meisten Autoren Polynome, z.B. STURMAN et. al. /26/, oder gebrochen-rationale Funktionen wie SAENZ /27/ und DESAYI/KRISHNAN /28/. Eine zusammenfassende Übersicht der zu diesem Thema erschienenen Literatur geben POPOVICS /24/ und EIBL/IVANYI /14/. Zweiachiale Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, die für die Finite-Element-Analyse geeignet sind, stammen von KUPFER /29/, LIU/NILSON /30/ und LINK /31/. Hinsichtlich eines Überblicks über die Unterschiede in den einzelnen Stoffgesetzen und weitere Ansätze wird auf EIBL/IVANYI /14/ verwiesen.

Die Vorbereitung bei der Formulierung eines temperaturabhängigen Materialgesetzes für Beton macht zuerst die Auswertung der vorhandenen, nicht immer

im Einklang stehenden Veröffentlichungen erforderlich.

Über das Verhalten von Beton bei hohen Temperaturen liegen verhältnismäßig zahlreiche Angaben vor. Die meisten Arbeiten beziehen sich jedoch auf die Untersuchung der mechanischen Eigenschaften von Beton unter Temperatureinfluß. Der für diese Untersuchung wichtigen Frage nach den Verformungseigenschaften von Beton, d.h. den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, gehen vor allem FISCHER /1/, HARMATHY /2/ und SCHNEIDER /3/ nach. Mathematische Beschreibungen der temperaturabhängigen Spannungs-Dehnungs-Gesetze liegen bislang nur in wenigen Fällen vor. KLINGSCH /4/ wendet als Formulierung einer $G(\epsilon)$ -Funktion die bekannte Parabel-Rechteck-Form /32/ an, wobei er die in dem Werkstoffgesetz enthaltenen Konstanten durch entsprechende temperaturabhängige Funktionen ersetzt, die den vorliegenden experimentellen Verläufen der Betonkennwerte angepaßt wurden. HAKSEVER /5/ benutzt eine von SCHNEIDER (vgl. HAKSEVER /5/) angegebene einaxiale Materialgleichung, die im gesamten Temperaturbereich $>20\text{ }^{\circ}\text{C}$ gültig ist, zur Untersuchung von Rahmentragwerken.

Eine systematische experimentelle und theoretische Erforschung der Materialeigenschaften von Beton, der tiefen Temperaturen ausgesetzt ist, ist vorwiegend durch Entwicklung und Bau von Flüssiggasbehältern notwendig geworden. Bisherige experimentelle Arbeiten wurden vor allem von LENTZ/MONFORE /6/ durchgeführt, die Betonproben hinsichtlich Elastizitätsmodul, Wärmedehnzahl und Festigkeit bis $-157\text{ }^{\circ}\text{C}$ untersuchten. Soweit es die Temperaturabhängigkeit dieser elastischen Kennwerte bis $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ betrifft, sei auch auf die Studie von JOHANSEN/BEST

/33/ verwiesen, die die physikalischen Eigenschaften von Beton im Rahmen von Kriechuntersuchungen angeben. In weiteren Experimenten haben MOSKVIN et. al. /7/ und MILOVANOV /34/ Beiträge zu diesem Thema geleistet. In Deutschland wurden Erfahrungen von WISCHERS/DAHMS /8/ bekannt, die eine Zusammenfassung und Wertung der unterschiedlichen Angaben vornahmen. Über die Tieftemperatureigenschaften von Beton berichten in neuerer Zeit KORDINA/NEISECKE /9/ und ROSTASY/SCHNEIDER/WIEDEMANN /35/, /36/, die auf weitere Versuche hinweisen.

Das Festigkeits- und Verformungsverhalten von Stahl ist in vielen Arbeiten umfassend untersucht worden. Da Bewehrungsstahl nur einem einaxialen Beanspruchungszustand unterliegt und Versuche zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften bei metallischen Werkstoffen, im Gegensatz zu Beton, keine Schwierigkeiten bereiten, liegen für alle Stahlsorten zuverlässige Arbeitslinien fest. Diese Spannungs-Dehnungs-Beziehungen sind von vielen Autoren als mathematische Funktionen dargestellt worden, z.B. durch bilineare Ansätze oder auch durch Polynome. Eine Zusammenfassung möglicher Formeln geben WEGNER /13/ und EIBL/IVANYI /14/.

Zur Klärung des Verformungsverhaltens von Stahl unter hohen Temperaturen wurden zuerst von SEEKAMP /37/ Versuche an Betonstahl durchgeführt, während DANNENBERG /38/, MILOVANOV /34/ und REHM/NÜRNBERGER /39/ später Spannstähle untersuchten. Die von den verschiedenen Autoren ermittelten Festigkeits- und Verformungseigenschaften des Baustoffes Stahl unter Einfluß hoher Temperaturen bildeten die Grundlage für die mathematischen Formulierungen der ein-

axialen Arbeitslinien durch KLINGSCH /4/.

Das Verformungsverhalten von Stahl bei tiefen Temperaturen war erst in letzter Zeit Gegenstand einiger Versuche. Der Frage nach den Arbeitslinien von Spannstählen sind HELLER/STOLTE /10/ nachgegangen. Weitere Beiträge zu den Tieftemperatureigenschaften von Stahl sind bei BRUGGELING /40/ und KORDINA/NEISECKE /9/ zu finden. Im Zusammenhang mit der Frage nach der Dauerhaftigkeit von Spannstählen wird auch von REHM/NÜRNBERGER /39/ auf den Einfluß niedriger Temperaturen auf die mechanischen Kennwerte eingegangen.

Insgesamt kann festgestellt werden, daß die Versuche zur Klärung der Tieftemperatureigenschaften von Beton noch viele weitere Experimente auf diesem Gebiet erfordern. Bis heute ist dem Verfasser noch kein Ansatz zur Formulierung einer Rechenwert-Funktion für das Spannungs-Dehnungs-Gesetz unter tiefen Temperaturen bekannt geworden. Auch liegen mathematische Ansätze zur funktionalen Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Gesetze von Betonstahl und Spannstahl unter tiefen Temperaturen, soweit dem Autor bekannt ist, noch nicht vor.

In den folgenden Abschnitten soll deshalb ein Materialgesetz für Stahlbeton, der tiefen Temperaturen ausgesetzt ist, erarbeitet werden, auf das bei den folgenden durchzuführenden numerischen Studien aufgebaut wird.

Für die Untersuchungen von Schalentragerwerken unter hohen Temperaturen wird auf die Ansätze von KLINGSCH /4/ zurückgegriffen. Im folgenden werden die Funktionen zur Beschreibung der Materialkennwerte von Beton und Stahl angegeben. Da die Untersuchungen

sich im Bereich hoher Temperaturen auf die Werte bis ca. 200 °C beschränken, wird für die funktionale Darstellung des Elastizitätsmoduls von Beton eine vereinfachte Form angewendet. Für den Beton ergeben sich damit folgende Abhängigkeiten der Materialeigenschaften von hohen Temperaturen:

- Betondruckfestigkeit:

$$\beta(T) = \beta_0 \cdot (1,00 - 0,123 \cdot 10^{-3} \cdot T + 0,188 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 0,428 \cdot 10^{-9} \cdot T^3 - 0,601 \cdot 10^{-11} \cdot T^4) \quad (2.1.1)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$\beta(T)$ die Druckfestigkeit in Abhängigkeit hoher Temperaturen (größer 20 °C)

β_0 die Druckfestigkeit bei Raumtemperatur (20 °C)

- Betonzugfestigkeit:

$$\beta_z(T) = \beta_{sz0} \cdot (1,00 - 0,123 \cdot 10^{-3} \cdot T + 0,188 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 0,428 \cdot 10^{-9} \cdot T^3 - 0,601 \cdot 10^{-11} \cdot T^4) \quad (2.1.2)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$\beta_z(T)$ die Zugfestigkeit in Abhängigkeit hoher Temperaturen (größer 20 °C)

β_{sz0} die Spaltzugfestigkeit bei Raumtemperatur (20 °C)

- Thermische Dehnung:

$$\alpha_T(T) = \alpha_{T_0} \cdot [0,1135 \cdot 10^{-1} - 0,688 \cdot 10^{-3} \cdot (T - 20) + 0,309 \cdot 10^{-5} \cdot (T - 20)^2] \quad (2.1.3)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$\alpha_T(T)$ der thermische Ausdehnungskoeffizient
in Abhängigkeit hoher Temperaturen
(größer 20 °C)

α_{T0} der thermische Ausdehnungskoeffizient
bei Raumtemperatur (20 °C)

- Elastizitätsmodul:

$$E_b(T) = E_{b0} \cdot e^{-3,4 \cdot 10^{-3}(T-20)} \quad (2.1.4)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$E_b(T)$ der Elastizitätsmodul in Abhängigkeit
hoher Temperaturen (größer 20 °C)

E_{b0} der Elastizitätsmodul bei Raum-
temperatur (20 °C)

Die Temperaturabhängigkeiten der benötigten Materialkennwerte von Stahl sind im Bereich hoher Temperaturen folgendermaßen charakterisiert:

- Elastizitätsmodul:

$$E_s(T) = E_{s0} \cdot [1,00 - 0,435 \cdot 10^{-4} \cdot (T-20) - 0,103 \cdot 10^{-5} \cdot (T-20)^2] \quad (2.1.5)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$E_s(T)$ der Elastizitätsmodul in Abhängigkeit
hoher Temperaturen (größer 20 °C)

E_{s0} der Elastizitätsmodul bei Raum-
temperatur (20 °C)

- Fließspannung:

$$\sigma_F(T) = \sigma_{F0} \cdot [1,00 - 0,91 \cdot 10^{-5} \cdot (T-20) - 1,988 \cdot 10^{-6} \cdot (T-20)^2] \quad (2.1.6)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$\sigma_F(T)$ die Fließspannung in Abhängigkeit hoher Temperaturen (größer 20 °C)

σ_{F0} die Fließspannung bei Raumtemperatur (20 °C)

- Thermische Dehnung:

$$\alpha_T(T) = \alpha_{T0} \cdot [0,1135 \cdot 10^{-1} - 0,688 \cdot 10^{-3} \cdot (T-20) + 0,309 \cdot 10^{-5} \cdot (T-20)^2] \quad (2.1.7)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$\alpha_T(T)$ der thermische Ausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit hoher Temperaturen (größer 20 °C)

α_{T0} der thermische Ausdehnungskoeffizient bei Raumtemperatur (20 °C)

2.2 Beton

2.2.1 Mechanische Eigenschaften

Aufgrund mehrerer empirischer Untersuchungen hat sich im Laufe der Zeit ein umfangreiches Datenmaterial angesammelt, das eine Reihe wertvoller Hinweise zur Klärung der Frage liefert, wie sich die

wichtigsten Betoneigenschaften bei Abkühlung bis in den Bereich von Temperaturen um -200°C verhalten. Die Frage nach dem Einfluß tiefer Temperaturen auf die mechanischen Eigenschaften von Normalbeton, z.B. Druck- und Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul, Bruchdehnung u.a., kann deshalb weitgehend anhand der bereits vorliegenden Literaturangaben beantwortet werden. Dabei wird auf die Ergebnisse folgender Untersuchungen zurückgegriffen: LENTZ/MONFORE /6/, MOSKVIN/KAPKIN/ANTONOV /7/, ROSTASY/SCHNEIDER/WIEDEMANN /35/ bzw. ROSTASY/WIEDEMANN /41/ und YAMANE/KASAMI/OKUNO /42/. Die von den jeweiligen Autoren verwendeten Testkörper und Versuchsbedingungen sind in Tabelle 2.1 angegeben. Zu erwähnen ist, daß die Ergebnisse der meisten Experimente bereits als statistischer Mittelwert mehrerer gleicher Proben unter denselben thermischen und mechanischen Randbedingungen ermittelt wurden.

Quelle	Beton-Proben	Typ	Lagerung	Versuchsbedingungen
LENTZ/MONFORE /6/	Normalbeton: Portlandzement, Kiessand, w/z = 0,39; 0,46; 0,62, LP-Zusatzmittel Leichtbeton: Blähschiefer, w/z = 0,45, LP-Zusatzmittel	Zylinder ϕ 5 cm x 10 cm; Prisma 5 cm x 5 cm x 20 cm	wassergesättigt; 50 % rel. Luftfeuchtigkeit; ofentrocken (62 $\pm$ 166 Tage)	bis -157°C , 19 $\pm$ 28 K/h
MOSKVIN/KAPKIN/ ANTONOV /7/	Normalbeton: Portlandzement Kies/Sand, w/z = 0,43	Würfel; Prisma	unterschiedlich (426 $\pm$ 550 Tage)	bis -60°C
ROSTASY/SCHNEIDER/ WIEDEMANN /35/ bzw. ROSTASY/ WIEDEMANN /41/	Normalbeton: Portland-/Hochofenzement (PZ 35 F / HOZ 35 L) Kiessand, w/z = 0,50	Zylinder ϕ 8 cm x 16 cm; Zylinder ϕ 8 cm x 8 cm	wassergesättigt; feucht (95 % rel. Luftf.); normal (65 % rel. Luftf.); getrocknet (~ 110 Tage)	bis -196°C , 120 K/h, ~196 K/min
YAMANE/KASAMI/ OKUNO /42/	Normalbeton: Kleissand, w/z = 0,50; 0,61; 0,70	Zylinder ϕ 5 cm x 10 cm; Zylinder ϕ 10 cm x 20 cm; Würfel 15 cm; Prisma 10 cm x 10 cm x 40 cm	wassergesättigt; feucht (85 % rel. Luftf.); normal (45 % rel. Luftf.); getrocknet (28 $\pm$ 90 Tage)	bis -196°C , 5 K/h

Tab. 2.1: Untersuchungen zum Tieftemperaturverhalten von Beton

Im folgenden wird bei der Darstellung der Festigkeits- und Verformungseigenschaften bis in den Bereich extrem tiefer Temperaturen unterschieden zwischen Beton, der üblichen Umweltbedingungen ausgesetzt ist, z.B. in der Anwendung bei oberirdischen Flüssiggasbehältern, etc. und wassergesättigtem Beton, wie er bei der Förderung und Lagerung von verflüssigtem Erdgas unter Wasser auftreten kann. Untersucht werden dabei Betone mit ähnlichen Eigenschaften, z.B. mittlerem Wasserzementwert, gleichen Zementarten und Zuschlägen.

2.2.1.1 Betondruckfestigkeit

Analysiert man die Ergebnisse der verschiedenen Autoren über die Festigkeitseigenschaften von untereinander vergleichbaren Normalbetonen mit im wesentlichen gleichem mittleren Wasserzementwert, so ergeben sich die in den Bildern 2.1 und 2.2 dargestellten Meßwerte. Als Bezugsgröße wird auf die Festigkeit bei Raumtemperatur zurückgegriffen.

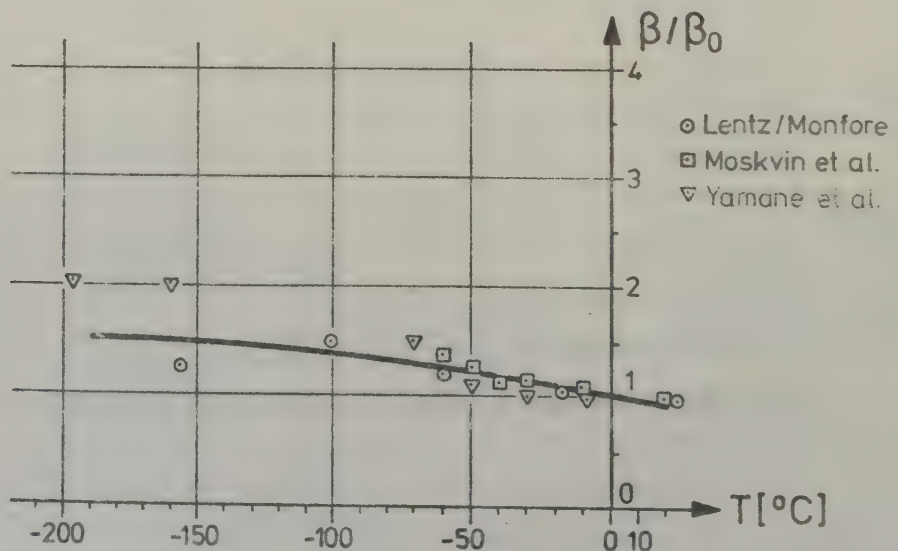


Bild 2.1: Betondruckfestigkeit eines normal gelagerten Betons

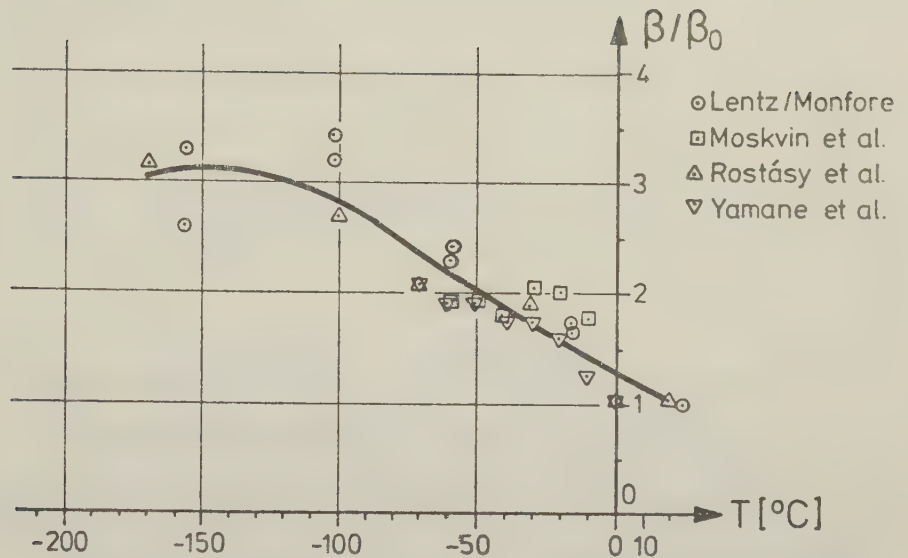


Bild 2.2: Betondruckfestigkeit eines wassergesättigten Betons

Ein Vergleich beider Abbildungen zeigt, daß der Festigkeitsanstieg in hohem Maße von dem Feuchtigkeitsgehalt, den der Beton beim Einfrieren aufweist, abhängig ist. Im allgemeinen steigt die Druckfestigkeit von normal gelagertem Beton bei einer Abkühlung von Raumtemperaturen bis -150°C kontinuierlich auf einen Wert von 150 % an, während bei wassergesättigten Proben ein größerer Zuwachs der Festigkeit, nämlich bis zum 3-fachen, zu verzeichnen ist, der im Bereich extrem tiefer Temperaturen um -150°C wieder abfällt. Daraus wird deutlich, daß der Zuwachs der Betondruckfestigkeit mit dem Wassergehalt in den Poren zusammenhängt. Die Auswertung des Betondruckfestigkeitsverlaufes von wassergesättigten Proben gibt die vielfach nachgewiesene und allgemein akzeptierte Tendenz deutlich wieder, daß der Einfluß der Eisbildung in den Poren des Betons sich aufgrund der verschiedenen

Zustände, in denen Eis kristallisiert, unterschiedlich auswirkt. Man unterscheidet Eis I mit einer hexagonalen Struktur, das im Temperaturbereich von 0 bis -115 °C gebildet wird, Eis II mit einer orthorhombischen Struktur bei -115 bis -155 °C und Eis III mit einem tetragonalen Aufbau unter -155 °C. Bei feuchten Proben mit hoher Wassersättigung ist der Abfall der Druckfestigkeit im Bereich sehr tiefer Temperaturen dadurch zu erklären, daß ein Teil des Porenwassers infolge der Volumenvergrößerung des bereits kristallisierten Wassers zusammengepreßt wird. Dieser Druckanstieg innerhalb des Betongefüges übersteigt die Zugfestigkeit in den Porenwänden, so daß es zu irreversiblen Schädigungen kommt. Hierauf haben LENTZ/MONFORE /6/ in ihrer Arbeit hingewiesen.

Im folgenden sollen die experimentell ermittelten Meßwerte durch Funktionsansätze beschrieben werden, die die Grundlage bei der Ermittlung temperaturabhängiger Stoffgesetze bilden. Als Methode wird die Funktionsapproximation durch ganze rationale Funktionen mit Hilfe des Fehlerquadratminimums gewählt, wobei für alle Betoneigenschaften ein Produktansatz folgender Form geschrieben wird:

$$x(T) = x_0 \cdot f(T) \quad (2.2.1)$$

Hierbei gibt x_0 den konstant angenommenen Wert bei Raumtemperatur wieder, während $f(T)$ den Einfluß unterschiedlicher Temperaturen berücksichtigt. Sofern es bei zukünftigen Untersuchungen erforderlich wird, lassen sich Abhängigkeiten der Eigenschaften x_0 von anderen Parametern, wie z.B. w/z-Wert, Zuschlag, Porengehalt, etc. in diese Formu-

lierung nachträglich ohne Schwierigkeiten einarbeiten.

Gehen alle vorhandenen Daten gleichberechtigt in die Studie ein, so erhält man für die Betondruckfestigkeit eines bei normalem Klima gelagerten Betons mit mittlerem w/z-Wert folgende Form (siehe Bild 2.1):

$$\beta(T) = \beta_0 \cdot (0,10359 \cdot 10^1 - 0,35053 \cdot 10^{-2} \cdot T + 0,51888 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 0,31291 \cdot 10^{-7} \cdot T^3) \quad (2.2.2)$$

Hierin bedeuten:

$\beta(T)$ die Druckfestigkeit eines normal gelagerten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

β_0 die Betondruckfestigkeit bei Raumtemperatur (20 °C)

T die Temperatur in °C

Entsprechend lautet die Form eines wassergesättigten Betons in Abhängigkeit des Grades der Abkühlung (siehe Bild 2.2):

$$\beta(T) = \beta_0 \cdot (0,12824 \cdot 10^1 - 0,13748 \cdot 10^{-1} \cdot T + 0,67566 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 0,51460 \cdot 10^{-6} \cdot T^3) \quad (2.2.3)$$

Hierin bedeuten:

$\beta(T)$ die Druckfestigkeit eines wassergesättigten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

β_0 die Betondruckfestigkeit bei Raumtemperatur (20 °C)

T die Temperatur in °C

Vergleicht man die ermittelten Kurvenverläufe mit den vorliegenden Meßpunkten, so ergibt sich im Be-

reich extrem tiefer Temperaturen ein ganzes Spektrum von Meßpunkten, die scheinbar ohne Beziehung zueinander stehen. Diese Abweichungen in den Meßergebnissen lassen sich durch die bei üblichen Betonprüfungen festzustellenden Streuungen allein nicht erklären, vielmehr muß angenommen werden, daß die unterschiedlichen Versuchsbedingungen der einzelnen Forscher dafür verantwortlich sind.

Dagegen haben ROSTASY/SCHNEIDER/WIEDEMANN /35/ bzw. /36/ festgestellt, daß bei einem schockartigen Abkühlen von normal gelagertem Beton gegenüber Versuchen mit kontinuierlichem Einfrieren keine nennenswerten Unterschiede beobachtet wurden.

Hier soll noch festgehalten werden, daß bei Leichtbeton ein deutlich geringerer Einfluß des Gefrierens auf die Druckfestigkeit auffällt, eine Tatsache, die von WISCHERS/DAHMS /8/ der Vermutung zugeschrieben wird, daß der Zuschlag und nicht so sehr der Zementstein die Festigkeit bestimmt. Da umfangreiche Versuchsdaten für Leichtbeton aber fehlen, wird auf diesen Werkstoff nicht näher eingegangen.

Bei einer zyklischen Temperaturbeanspruchung konnte nach übereinstimmender Feststellung der meisten Autoren nur bei wassergesättigten Proben eine Einbuße an Druckfestigkeit beobachtet werden. ROSTASY/SCHNEIDER/WIEDEMANN /35/ ermittelten, daß Versuchskörper, die bei einer relativen Luftfeuchtigkeit unter 85 % gelagert wurden, keine irreversiblen Schäden und auch keinen Rückgang der Festigkeit zeigten und daß dagegen bei wassergesättigten Betonen mit schädigenden Einflüssen in Abhängigkeit von den Temperatur-Amplituden und der Anzahl der durchlaufenen Zyklen zu rechnen ist. Diese Auto-

ren empfehlen, bei Stahlbetonbauteilen, die verstärkt tiefen bis sehr tiefen Temperaturen ausgesetzt sind, den kritischen Wert von 85 % nicht zu überschreiten.

2.2.1.2 Betonzugfestigkeit

Bei der Auswertung der Meßergebnisse bezüglich der Veränderung der Betonzugfestigkeit infolge Abkühlung ergeben sich die in den Bildern 2.3 und 2.4 wiedergegebenen Tendenzen. Es ist zu erkennen, daß Beton im Normklima einen weitgehend gleichmäßigen Zuwachs der Zugfestigkeit verzeichnet. Die Annahme, daß die Wassersättigung einen großen Einfluß auf die Betoneigenschaften ausübt, findet in den Meßergebnissen ihre Bestätigung. Zwischen Raumtemperatur und -20 °C ergibt sich ein ziemlich steiler Anstieg, daran anschließend nur ein geringer Zuwachs bis zu einem Maximum von ungefähr dem 2,2-fachen bei -100°C, dann fällt die Zugfestigkeit wieder ab. Die theoretischen Ansätze zur Approximation der Meßwerte durch Kurven liefern folgende Gleichungen für normal gelagerten Beton (siehe Bild 2.3):

$$\beta_z(T) = \beta_{z0} \cdot (0,10991 \cdot 10^1 - 0,41509 \cdot 10^{-2} \cdot T \quad (2.2.4) \\ - 0,20063 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 0,54726 \cdot 10^{-7} \cdot T^3)$$

Hierin bedeuten:

$\beta_z(T)$ die Zugfestigkeit eines normal gelagerten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

β_{z0} die Betonzugfestigkeit bei Raumtemperatur (20 °C)

T die Temperatur in °C

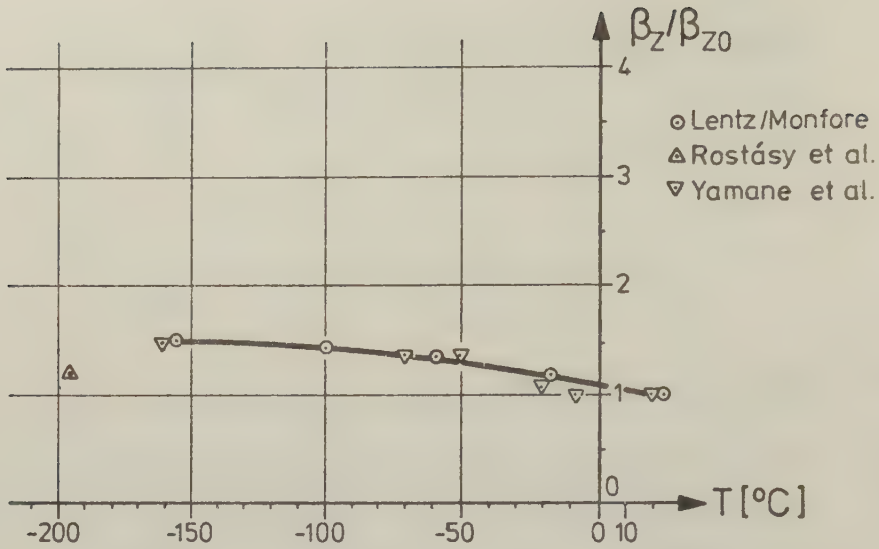


Bild 2.3: Betonzugfestigkeit eines normal gelagerten Betons

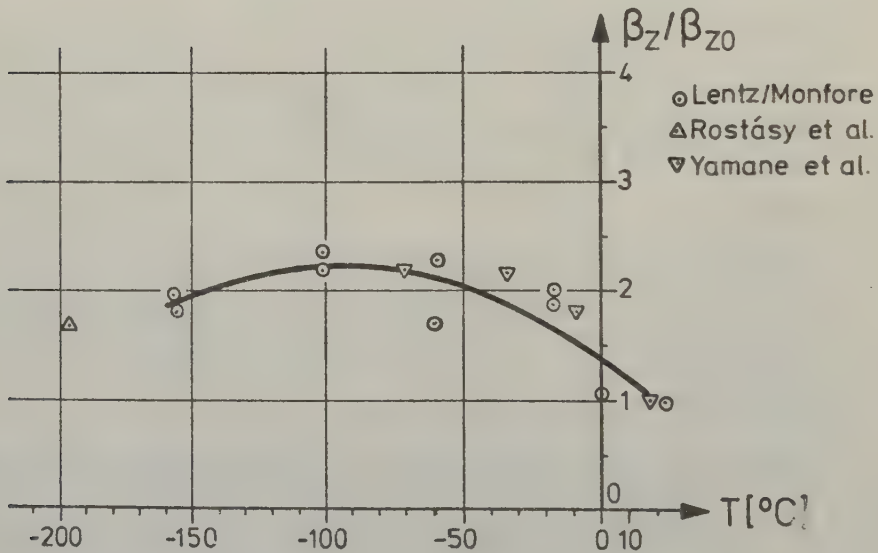


Bild 2.4: Betonzugfestigkeit eines wassergesättigten Betons

Für wassergesättigten Normalbeton wurde ermittelt (siehe Bild 2.4):

$$\beta_z(T) = \beta_{z0} \cdot (0,14267 \cdot 10^1 - 0,17938 \cdot 10^{-1} \cdot T - 0,11002 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 - 0,99750 \cdot 10^{-7} \cdot T^3) \quad (2.2.5)$$

Hierin bedeuten:

$\beta_z(T)$ die Zugfestigkeit eines wassergesättigten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

β_{z0} die Betonzugfestigkeit bei Raumtemperatur (20 °C)

T die Temperatur in °C

Nach einem einmaligen Gefrieren und folgendem Auftauen nimmt die Betonzugfestigkeit von normal gelagerten Testkörpern etwas ab, während sie bei wassergesättigten Proben bedeutend mehr absinkt. Auch hier bestätigt sich die Erwartung, daß die Anzahl der Kälteschocks von großer Bedeutung ist.

2.2.1.3 Elastizitätsmodul

Ergebnisse der Bestimmung des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit tiefer Temperaturen sind in den Bildern 2.5 und 2.6 angegeben. Als Bezugsgröße wird wiederum der Wert bei Raumtemperatur herangezogen. Der Wert für einen normal gelagerten Beton nimmt nach LENTZ/MONFORE /6/ nur um etwa 10 % zu, wenn die Temperatur auf -160 °C fällt, während der Elastizitätsmodul der wassergesättigten Probe über 50 % ansteigt. Diese Tendenz wird auch durch die

Messungen von YAMANE et. al. /42/ bestätigt. Demgegenüber weichen die Angaben von ROSTASY/WIEDEMANN /41/ stark von den anderen Autoren ab. Die Ursache hierfür ist zum einen sicherlich darin zu sehen, daß gewisse Schwankungen durch die herstellungsbedingten Unterschiede in den Betonmischungen unvermeidlich sind, zum anderen aber auch unterschiedliche Prüfverfahren angewendet wurden, nämlich das Resonanz-Frequenz-Verfahren zur Bestimmung des dynamischen E-Moduls (LENTZ/MONFORE /6/) und die statische Prüfung bei 1/3 der Bruchlast (YAMANE et. al. /42/, ROSTASY/WIEDEMANN /41/). Da bei der Beschreibung der Versuchsreihen durch Funktionsapproximation auf einen möglichst glatten Verlauf mehr Wert gelegt wird als auf eine zu genaue Annäherung der ohnehin stark streuenden Versuchsdaten, bleiben die wenigen von ROSTASY/WIEDEMANN /41/ angegebenen Werte unberücksichtigt. Mit Rücksicht auf die durchzuführende numerische Untersuchung soll deshalb hier für den Elastizitätsmodul eines Betons unter normalen klimatischen Bedingungen ein linearer Ansatz betrachtet werden.

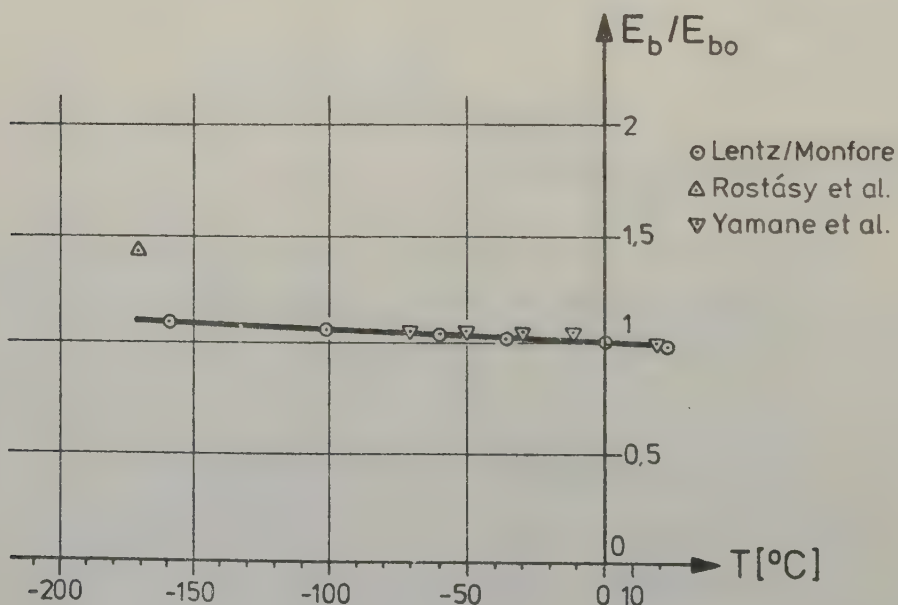


Bild 2.5: Elastizitätsmodul eines normal gelagerten Betons

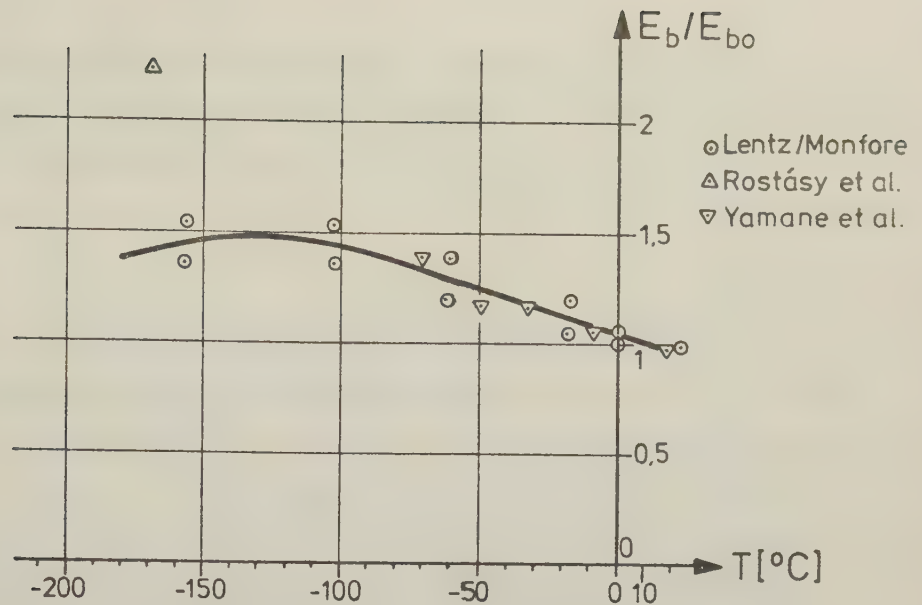


Bild 2.6: Elastizitätsmodul eines wassergesättigten Betons

Es ergibt sich die Funktion (siehe Bild 2.5):

$$E_b(T) = E_{b0} \cdot (0,10115 \cdot 10^1 - 0,48019 \cdot 10^{-3} \cdot T) \quad (2.2.6)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$E_b(T)$ der Elastizitätsmodul eines normal gelagerten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

E_{b0} der Elastizitätsmodul bei Raumtemperatur (20 °C)

Bei der Tragwerksberechnung soll nachgewiesen werden, daß aufgrund der derzeitigen Kenntnisse dieser Ansatz für das hier behandelte Problem durchaus berechtigt ist.

Die bei den wassergesättigten Testkörpern infolge

thermischer Beanspruchung auftretende Veränderung des Elastizitätsmoduls wird am besten durch folgende Gleichung qualitativ und quantitativ beschrieben (siehe Bild 2.6):

$$E_b(T) = E_{b0} \cdot (0,10493 \cdot 10^1 - 0,33058 \cdot 10^{-2} \cdot T - 0,25758 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 0,19371 \cdot 10^{-6} \cdot T^3) \quad (2.2.7)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$E_b(T)$ der Elastizitätsmodul eines wassergesättigten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

E_{b0} der Elastizitätsmodul bei Raumtemperatur (20 °C)

Vergleicht man die Ergebnisse der verschiedenen Autoren bezüglich des Frost-Tau-Verhaltens von Beton, so gelangt man zu der Erkenntnis, daß zwischen den einzelnen Studien große Abweichungen bestehen. Während LENTZ/MONFORE /6/ bei wassergesättigten Normalbetonproben nach 10-maligem Abkühlen und Auftauen keine bemerkenswerten Änderungen des Elastizitätsmoduls verzeichnen, verliert der E-Modul nach YAMANE et. al. /42/ bei einmaligem Schockgefrieren 50 bis 70 % seines ursprünglichen Wertes und sogar rund 90 % bei 3-maligem Versuch.

2.2.2 Thermische Dehnung

Das temperaturbedingte Ausdehnungsverhalten von Beton bei Einwirkung tiefer Temperaturen ist ein

physikalisches Phänomen, das gerade bei diesem Werkstoff infolge des unterschiedlichen Verhaltens seiner einzelnen Komponenten kompliziert ist. Da die thermische Ausdehnung einen entscheidenden Einfluß auf das Verhalten der Bauteile hat, ist die genaue Berücksichtigung des Ausdehnungskoeffizienten und die richtige Behandlung der Eigenspannungen von entscheidender Bedeutung, um Schäden an Bauwerken zu verhindern. Die Messungen von KORDINA/NEISECKE /9/ zeigten bei Betonproben, die unter normalen Bedingungen gelagert wurden, eine lineare Abnahme des Wärmeausdehnungskoeffizienten auf einen Wert von ca. 50 % desjenigen bei Raumtemperatur (vgl. Bild 2.7). Dieses Ergebnis bestätigt damit auch die von LENTZ/MONFORE /6/ und MOSKVIN/KAPKIN/ANTONOV /7/ geäußerte Annahme. Dagegen zeigten die von ROSTASY/SCHNEIDER/WIEDEMANN /35/ ermittelten Temperatur-Dehnungs-Linien für Proben mit 65 bis 85 % relativer Luftfeuchtigkeit einen nahezu linearen Verlauf, was auf eine ungefähr konstant verlaufende Dehnzahl schließen läßt. Bei den hier durchzuführenden Berechnungen wird angenommen, daß die Wärmedehnzahl mit abnehmenden Temperaturen kleiner wird, und somit ein linearer Funktionstyp berechtigt ist (siehe Bild 2.7):

$$\alpha_T(T) = \alpha_{T_0} \cdot (0,96316 + 0,24561 \cdot 10^{-2} \cdot T) \quad (2.2.8)$$

Hierin bedeuten:

$\alpha_T(T)$ der thermische Ausdehnungskoeffizient eines normal gelagerten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

α_{T_0} der thermische Ausdehnungskoeffizient bei Raumtemperatur (20 °C)

T die Temperatur in °C

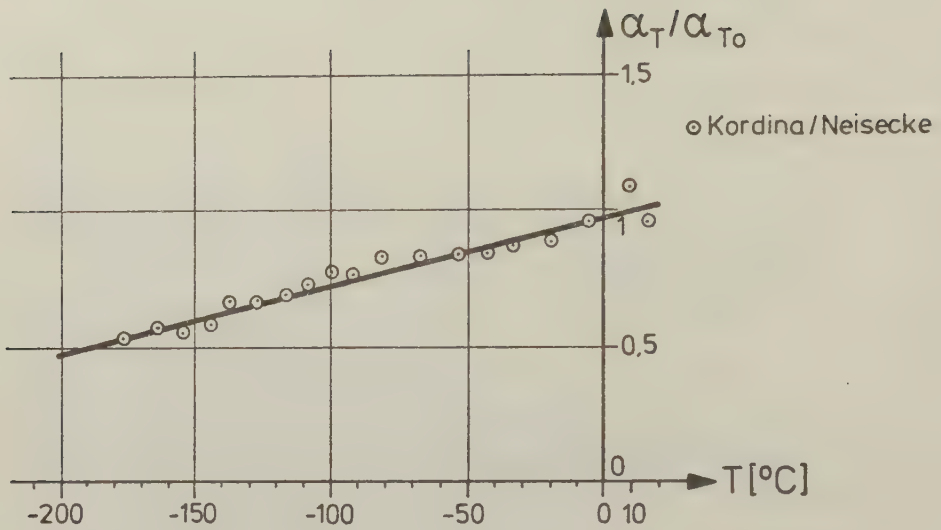


Bild 2.7: Temperaturausdehnungskoeffizient eines normal gelagerten Betons

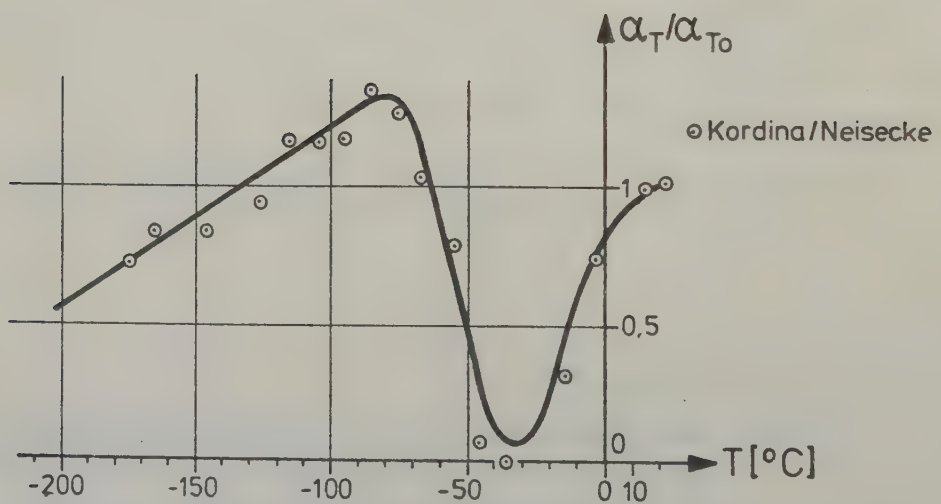


Bild 2.8: Temperaturausdehnungskoeffizient eines wassergesättigten Betons

Bei wassergesättigten Proben wurde ein vollkommen anderes Temperaturdehnverhalten festgestellt. Bei einem Übergang von ca. -30 °C zu -80 °C zeigen diese Prüfkörper eine Ausdehnung, was darin erklärt ist, daß das vorhandene Eis in den Poren sich zwar bei weiterer Abkühlung zusammenziehen will, andererseits aber immer noch zusätzliches Wasser gefriert und sich das Volumen dieses Teils somit vergrößert. Diese Ergebnisse stimmen im wesentlichen bei den verschiedenen Studien überein. Die Auswertung der von KORDINA/NEISECKE /9/ veröffentlichten Daten mit Hilfe der Fehlerquadratmethode lieferte folgende Gleichungen, die die in der Praxis beobachteten Zusammenhänge am besten wiedergeben (siehe Bild 2.8):

-80 °C ≤ T ≤ 20 °C:

$$\begin{aligned} \alpha_T(T) = \alpha_{T_0} \cdot (& 0,84465 + 0,19278 \cdot 10^{-1} \cdot T \\ & - 0,84442 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 - 0,77420 \cdot 10^{-5} \cdot T^3 \\ & + 0,83918 \cdot 10^{-6} \cdot T^4 + 0,14734 \cdot 10^{-7} \cdot T^5 \\ & + 0,66402 \cdot 10^{-10} \cdot T^6) \end{aligned} \quad (2.2.9a)$$

T ≤ -80 °C:

$$\alpha_T(T) = \alpha_{T_0} \cdot (0,19131 \cdot 10^1 + 0,68835 \cdot 10^{-2} \cdot T) \quad (2.2.9b)$$

Hierin bedeuten:

$\alpha_T(T)$ der thermische Ausdehnungskoeffizient eines wassergesättigten Betons in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

α_{T_0} der thermische Ausdehnungskoeffizient bei Raumtemperatur (20 °C)

T die Temperatur in °C

Aus Bild 2.8 gehen deutlich die auch in den ermittelten Funktionen zum Ausdruck gebrachten drei Bereiche hervor. Die zugrunde gelegten Untersuchungen lassen keine bedeutenden Einflüsse von Frost-Tau-Tests auf den Temperaturausdehnungskoeffizienten erkennen.

2.2.3 Bruchhypothese

Das Bruchverhalten von Beton, insbesondere unter Berücksichtigung des Temperaturverhaltens dieses Baustoffs, ist ein komplexer Vorgang, der bis heute noch nicht völlig geklärt ist. Jedes mathematische Modell zur Beschreibung des Materialverhaltens muß Vereinfachungen beinhalten. Deshalb wird die Formulierung einer Grenz- oder Versagensbedingung auf eine Aufgabenstellung beschränkt, bei der eine bereits vorliegende Hypothese auf den Bereich wechselnder Temperaturen erweitert wird. Da bislang nur wenige experimentell bestimmte Parameter zur Beschreibung des Bruchverhaltens von Beton unter Temperaturbeanspruchung vorliegen, die sich dann auch nur auf einachsige Versuche beschränken, wird die Hypothese der maximalen Normalspannung angewandt, die die Beanspruchbarkeit auf die größte zulässige Normalspannung begrenzt. Der Vorteil dieser Beanspruchungsbedingung ist, daß das Bruchverhalten durch wenige Parameter, nämlich die Zug- und Druckfestigkeit von Beton, beschrieben werden kann, deren Abhängigkeit von der Temperatur durch Versuche abgesichert ist. Zweiaxiale Belastungsversuche an Prüfkörpern, über die von KUPFER /29/ berichtet wird, ergaben den charakteristischen, in

Bild 2.9 dargestellten Verlauf der Beanspruchungsgrenze bei Raumtemperatur. Man erkennt, daß die Festigkeit von Beton unter zweiachsigem Zug nahezu von dem Spannungsverhältnis der Hauptspannungen unabhängig ist und den in Versuchen ermittelten einaxialen Zugfestigkeiten entspricht.

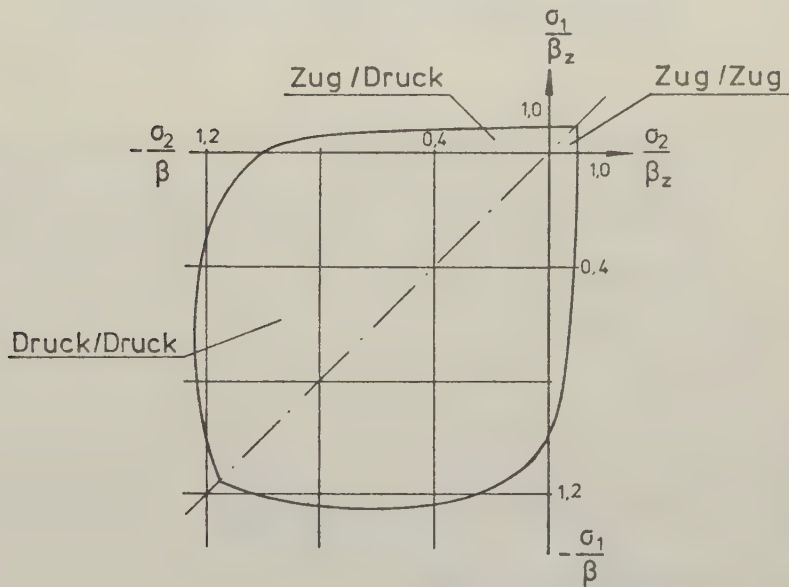


Bild 2.9: Bruchgrenze für Beton nach KUPFER

Die anderen Höchstspannungen können ebenfalls durch einfache Gleichungen angenähert werden. Ersetzt man die Werte für die Druck- und Zugfestigkeit in den Formeln von KUPFER /29/ durch die entsprechenden, im vorigen Abschnitt ermittelten temperaturabhängigen Kenngrößen, so wird das Bruchkriterium durch folgende Form beschrieben:

Zug-Zug-Bereich:

$$\sigma_2 = \beta_z(T)$$

(2.2.10)

Druck-Zug-Bereich:

$$\sigma_2 = \beta_z(T) \cdot \left[1 + 0,8 \cdot \frac{\sigma_1}{\beta(T)} \right] \quad (2.2.11)$$

Druck-Druck-Bereich:

$$\left[\frac{\sigma_1}{\beta(T)} + \frac{\sigma_2}{\beta(T)} \right]^2 + \frac{\sigma_1}{\beta(T)} + 3,65 \frac{\sigma_2}{\beta(T)} = 0 \quad (2.2.12)$$

Diese Formeln gelten für die Kurven unterhalb der Symmetrieachse, für die andere Bildhälfte lauten sie entsprechend, wenn man die Hauptspannungen vertauscht.

2.2.4 Spannungs-Dehnungs-Beziehung

2.2.4.1 Elastischer Beton

Die in den vorigen Abschnitten bestimmten Funktionen zur Beschreibung der temperaturabhängigen Kennwerte von Beton werden nun zur Formulierung eines temperaturabhängigen Spannungs-Dehnungs-Gesetzes herangezogen.

Da Versuche zur Bestimmung des σ - ϵ -Verlaufes für Beton unter Einfluß niedriger bis sehr tiefer Temperaturen nur in wenigen Fällen vorliegen und sich dann auch nur auf einaxiale Experimente beziehen, wird auf das Werkstoffgesetz des ebenen Spannungszustandes zurückgegriffen, in dem der Elastizitätsmodul durch einen entsprechenden temperaturabhängigen Parameter ersetzt wird. Die Querkontraktions-

zahl ν bleibt, wie Versuche bestätigt haben, im wesentlichen konstant. Die Werte liegen für Normalbeton zwischen 0,18 und 0,23. Typisch für den Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linien von Beton, der bis in den Bereich sehr tiefer Temperaturen abgekühlt wird, ist die Tatsache, daß ein ausgeprägtes linear-elastisches und sprödes Verhalten zu beobachten ist. Das Materialverhalten wird somit als isotrop, homogen und linear-elastisch angesehen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_b(T)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

Eine genauere Berechnung ist heute weder möglich, weil die entsprechenden Versuchsdaten fehlen, noch im Hinblick auf das angestrebte Ziel der wirklichkeitsnahen Berechnung von temperaturbeanspruchten Schalen erforderlich, weil sich Abweichungen von der Wirklichkeit bei einer Bauteiluntersuchung nur wenig auswirken. Da sich diese Arbeit auf den Gebrauchszustand beschränkt, ist diese auf geeignete numerische Handhabung zielende Festlegung durchaus berechtigt. Darüberhinaus ist zu betonen, daß sich Änderungen des Spannungs-Dehnungs-Gesetzes ohne Schwierigkeiten in die hier vorgestellte Theorie einbauen lassen.

2.2.4.2 Gerissener Beton

Versuche haben gezeigt, daß Beton unabhängig von der Anzahl und Richtung der Bewehrungslagen rechtwinklig zu den Zugspannungstrajektorien reißt. Nachfolgend soll unterschieden werden zwischen Beton im Zug-Druck-Bereich und im Zug-Zug-Bereich. Im ersten Fall wird angenommen, daß der Beton zwischen parallelen Rissen Druckspannungen aufnehmen kann und darüberhinaus in der Lage ist, im Laufe des nachfolgenden Belastungssinkrementes Schubspannungen zu übertragen. Die Schubtragfähigkeit des in einer Richtung gerissenen Betons wird in Anlehnung an den Vorschlag von HAND/PECKNOLD/SCHNOBRICH /11/ jedoch durch Einführung eines Reduktionsfaktors abgemindert, der den Einfluß von Verbund, Rißweite, Rißverzahnung, Verdübelungskräften, Schlupf und dgl. berücksichtigt. Diese Autoren schätzen den Schubmodul im gerissenen Zustand im Mittel auf 40 % desjenigen von ungerissenem Beton. Die in Wirklichkeit örtlich konzentriert auftretenden Risse werden in dem Modell so behandelt, als ob sie über bestimmte Bereich gleichmäßig verteilt und in einer Richtung laufend aufträten.

Für die numerische Handhabung müssen die auf die Rißrichtungen bezogenen Werkstoffgesetze transformiert werden. Die dafür benötigten Rotationsmatrizen können aus der Literatur entnommen werden (z.B. EBBINGHAUS /43/).

$$\begin{bmatrix} E(T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha G(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \cdot c^2 & 0 & -2\alpha G cs \\ E \cdot s^2 & 0 & 2\alpha G cs \\ E \cdot cs & 0 & \alpha G (c^2-s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \cdot c^4 + 4\alpha G \cdot c^2 s^2 & E \cdot c^2 s^2 - 4\alpha G \cdot c^2 s^2 & E \cdot c^3 s - 2\alpha G \cdot (c^3 s - cs^3) \\ E \cdot s^2 c^2 - 4\alpha G \cdot c^2 s^2 & E \cdot s^4 + 4\alpha G \cdot c^2 s^2 & E \cdot cs^3 + 2\alpha G \cdot (c^3 s - cs^3) \\ E \cdot c^3 s - 2\alpha G \cdot (c^3 s - cs^3) & E \cdot cs^3 + 2\alpha G \cdot (c^3 s - cs^3) & E \cdot c^2 s^2 + \alpha G \cdot (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix}$$

Hierin bedeuten:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

$$c = \cos \varphi$$

$$s = \sin \varphi \quad \varphi = \text{Rißrichtung} \quad (2.2.14)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{c^4 + \frac{2\alpha}{1+\nu} \cdot c^2 s^2}{1+\nu} & & \text{symm.} \\ \frac{c^2 s^2 - \frac{2\alpha}{1+\nu} \cdot c^2 s^2}{1+\nu} & \frac{s^4 + \frac{2\alpha}{1+\nu} \cdot c^2 s^2}{1+\nu} & \\ \frac{c^3 s - \frac{\alpha}{1+\nu} \cdot (c^3 s - cs^3)}{1+\nu} & \frac{cs^3 + \frac{\alpha}{1+\nu} \cdot (c^3 s - cs^3)}{1+\nu} & \frac{c^2 s^2 + \frac{\alpha}{2(1+\nu)} \cdot (c^2 - s^2)^2}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \cdot E(T) \quad (2.2.15)$$

Reißt der Beton auch in der anderen Richtung, weil die zweite Hauptspannung ebenfalls die zulässige Hauptzugspannung überschreitet, so wird angenom-

men, daß derart belasteter Beton keine Steifigkeit mehr besitzt und sich diese Elementschichten ohne Widerstand verformen. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist somit gleich 0:

$$[\underline{E}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

2.3 Stahl

2.3.1 Mechanische Eigenschaften

Während sich in der Literatur zum Hochtemperaturverhalten von Beton- und Spannstahl sowie Baustahl eine verhältnismäßig große Zahl von Prüfergebnissen finden läßt, wird nur in auffallend wenigen Arbeiten über das Verhalten von Stahl bei tiefen Temperaturen berichtet. Da dieser Baustoff jedoch homogenere Eigenschaften zeigt als Beton, was daraus hervorgeht, daß die Streuung der überwiegend in Zugversuchen bestimmten mechanischen Werkstoffkennwerte sehr gering ist, läßt sich das Tieftemperaturverhalten für Stahl zuverlässiger angeben als für Beton. Ausgehend von den Versuchsergebnissen von KORDINA/NEISECKE /9/, HELLER/STOLTE /10/, BEHAR /44/, REHM/NÜRNBERGER /39/ u.a. werden wie bei der Beschreibung der Betoneigenschaften durch Approximation der Testergebnisse für den gesamten Bereich tiefer Temperaturen gültige Kurven der Kennwerte formuliert. Damit ist es möglich, das Werk-

stoffverhalten von Stahl durch einfache mathematische Ausdrücke befriedigend genau zu beschreiben. Zu betonen ist, daß den angeführten Untersuchungen Spannstähle zugrunde liegen, da die meisten Baustähle bei Kältewerten ab $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ verspröden und somit für den Einsatz ungeeignet sind. Insofern werden Spannstähle auch als schlaaffe Bewehrung eingebaut.

2.3.1.1 Streckgrenze

Wie aus den Untersuchungen von REHM/NÜRNBERGER /39/ hervorgeht, nimmt die Fließspannung von Stahl mit abnehmender Temperatur kontinuierlich zu. Bild 2.10 zeigt die Meßpunkte dieser Autoren sowie den Kurvenverlauf. Als Bezugsgröße wird der Wert bei Raumtemperatur herangezogen.

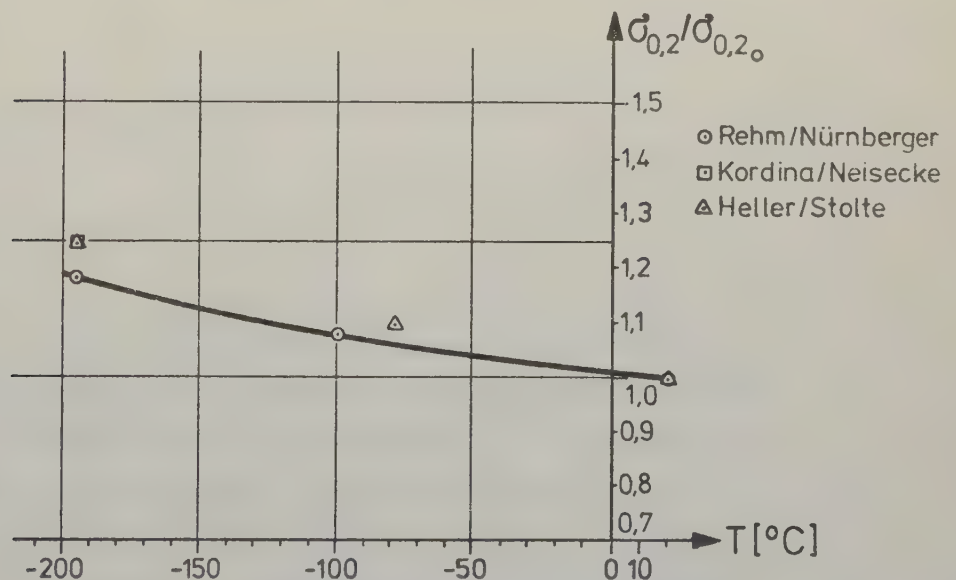


Bild 2.10: Streckgrenze von Spannstahl

Diese Ergebnisse werden auch von KORDINA/NEISECKE /9/ bestätigt, die bei -196 °C eine Erhöhung der Streckgrenze um 25 % ermitteln.

Auch andere Untersuchungen lassen erkennen, daß die des öfteren unterstellte Vermutung, daß das Ermüdungsverhalten von Stahl mit abnehmender Temperatur verbessert wird, zutreffend ist. Die gewählte Beschreibung des funktionellen Zusammenhangs der Fließspannung in Abhängigkeit der Temperatur ist eine Parabel 2. Grades, die sich durch folgende Form ausdrücken läßt (siehe Bild 2.10):

$$\sigma_{0,2}(T) = \sigma_{0,20} \cdot (0,10099 \cdot 10^1 - 0,52778 \cdot 10^{-3} \cdot T \quad (2.3.1) \\ + 0,17361 \cdot 10^{-5} \cdot T^2)$$

Hierin bedeuten:

$\sigma_{0,2}(T)$ die Fließspannung in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

$\sigma_{0,20}$ die Fließspannung bei Raumtemperatur (20 °C)

T die Temperatur in °C

2.3.1.2 Zugfestigkeit

Die Veränderung der Zugfestigkeit kann bei Abkühlung von Stahlproben auf -196 °C, bezogen auf die Messung bei Raumtemperatur, je nach Prüfbedingungen 15 bis 25 % ausmachen. Damit liegt dieser Wert in der Größenordnung der Zunahme der Streckgrenze. Zur Beschreibung der Versuchswerte kann man am zweckmäßigsten den gleichen Ansatz heranziehen wie für die Fließspannung. Die Ergebnisse sind in Bild 2.11

dargestellt. Man erkennt sofort die Analogie zu dem Verlauf der Streckgrenze, und auch die erhaltene Funktion bringt gegenüber den Parametern in der approximierten Fließspannung nur eine geringe Veränderung.

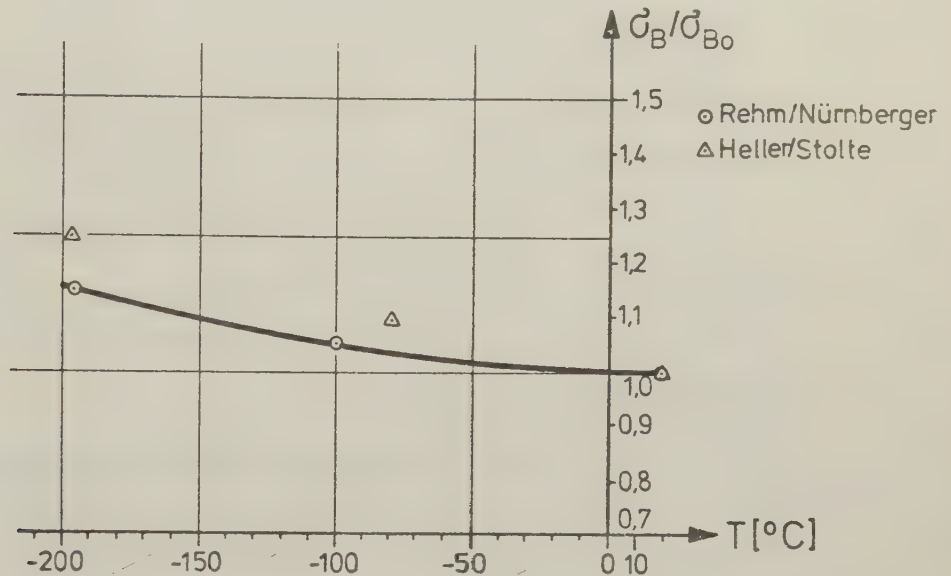


Bild 2.11: Zugfestigkeit von Spannstahl

Es ergibt sich:

$$\sigma_B(T) = \sigma_{B_0} \cdot (0,10025 \cdot 10^1 - 0,18519 \cdot 10^{-2} \cdot T + 0,28935 \cdot 10^{-5} \cdot T^2) \quad (2.3.2)$$

Hierin bedeuten:

T die Temperatur in °C

$\sigma_B(T)$ die Bruchspannung in Abhängigkeit tiefer Temperaturen (kleiner 20 °C)

σ_{B_0} die Bruchspannung bei Raumtemperatur (20 °C)

Diese Tendenz in der Zunahme der Festigkeit mit abnehmender Temperatur findet auch in weiteren Arbeiten ihre Bestätigung.

2.3.1.3 Elastizitätsmodul

Bezüglich des Einflusses tiefer Temperaturen auf den Elastizitätsmodul von Stahl wird übereinstimmend berichtet, daß der E-Modul kaum Abweichungen gegenüber dem bei Raumtemperatur erkennen läßt. Etwaige Unterschiede in den verschiedenen Messungen sind geringer als die beobachtete Streuung bei Raumtemperatur. Es kann deshalb angenommen werden, daß das Abkühlen von Beton- und Spannstahl bis in den Bereich sehr tiefer Temperaturen keine Änderung des Elastizitätsmoduls zur Folge hat und somit bei der numerischen Handhabung in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ein konstanter Wert angesetzt werden kann.

2.3.2 Thermische Dehnung

Die verschiedensten Autoren, die sich mit dem Problem des thermischen Verhaltens von Stahl bei tiefen Temperaturen befaßt haben, wie KORDINA/NEISECKE /9/, ROSTASY/WIEDEMANN /41/ et. al., sind einmütig davon überzeugt, daß sich Stahl bei Abkühlung und Erwärmung nahezu linear dehnt. Die Ursachen sind noch nicht vollständig geklärt, jedoch wird die Temperaturdehnung nach heute vorherrschender Auffassung durch Gitterschwingungen hervorgerufen, in Folge derer Atome bzw. Moleküle eine Volumenänderung herbeiführen, die proportional zur Temperaturänderung verläuft.

Zugrunde gelegt wird bei den durchzuführenden Rechnungen ein konstanter Ausdehnungskoeffizient von

$1,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, wie er auch nach DIN 1045 /32/ angegeben ist.

Vergleicht man das thermische Verhalten des Stahls mit dem von Beton, wie es in den vorigen Abschnitten beschrieben wurde, so zeigt sich bei Beton eine deutlich geringere Dehnung bei gleicher Abkühlung. Durch diese Unterscheidung wird es möglich, Probleme, die bisher auf der Grundlage gleichen thermischen Verhaltens der Komponenten Stahl und Beton berechnet wurden, durch Einführung von wirklichkeitsnahen Größen zu lösen.

2.3.3 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

2.3.3.1 Elastischer Stahl

Im Gegensatz zum Beton werden die Stahleinlagen nur einaxial beansprucht. Insofern können die Versuchsergebnisse über die Tieftemperatureigenschaften von Stahlproben ohne weitere Annahmen und Voraussetzungen zur Formulierung des Spannungs-Dehnungs-Gesetzes herangezogen werden. Wie dies bereits für den Beton beschrieben wurde, wird der Temperatureinfluß für das Werkstoffgesetz durch eine entsprechende Parametersteuerung der einzelnen mechanischen Kennwerte berücksichtigt. Dieser Ansatz hat den Vorteil, daß neue Erkenntnisse jederzeit approximiert werden können.

Außerdem können weitere stoffliche Einflußgrößen leicht in den Produktansätzen durch entsprechende Erweiterung erfaßt werden. Da keine Temperaturabhängigkeit des E-Moduls von Stahl festgestellt

wurde, bleibt das Spannungs-Dehnungs-Gesetz unabhängig von der Temperatur unverändert. Lediglich wird der elastische Bereich erweitert, da beim Einwirken tiefer Temperaturen die Streckgrenze ansteigt. Für die programmtechnische Anwendung müssen Spannungs- und Dehnungsvektoren auf ein einheitliches Koordinatensystem bezogen werden. Die Spannungs-Dehnungs-Gesetze, die sich auf das x' - y' -Koordinatensystem (Bild 2.12) beziehen, müssen somit auf das globale x - y -System transformiert werden.

$$\{\underline{\sigma}'\} = [\underline{E}'] \{\underline{\epsilon}'\}$$

$$[\underline{E}] = [\underline{T}_\sigma]^{-1} [\underline{E}'] [\underline{T}_\epsilon] \quad (2.3.3)$$

$$\{\underline{\sigma}\} = [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}\}$$

$$[\underline{E}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & 0 \\ cs & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^4 & c^2 s^2 & c^3 s \\ c^2 s^2 & s^4 & cs^3 \\ c^3 s & cs^3 & c^2 s^2 \end{bmatrix} \cdot E_s$$

Hierin bedeuten:

E_s = Elastizitätsmodul

c = $\cos \varphi$

s = $\sin \varphi$

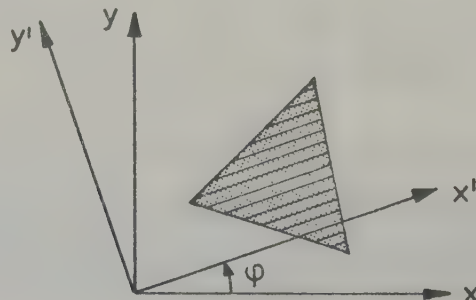


Bild 2.12: Bezugssysteme der Bewehrungselemente

Wie aus der Elastizitätsmatrix ersichtlich ist, wird der Einfluß von Durchmesser und Abstand der Bewehrungsstäbe bei diesem Berechnungsmodell nicht explizit berücksichtigt, vielmehr wird angenommen, daß die Bewehrung gleichförmig verteilt ist. Insofern kann jede Bewehrungslage durch eine verschmierte Stahlschicht ersetzt werden, deren Dicke sich wie folgt errechnet:

$$t_s = \frac{A_s}{a} = \frac{a_s}{100} = \mu \cdot d \quad (2.3.4)$$

Hierin bedeuten:

A_s = Querschnittsfläche eines Bewehrungsstabes

a_s = Bewehrungsquerschnitt in cm^2/m

a = Abstand der Bewehrungsstäbe untereinander

μ = Bewehrungsgrad in %

d = Querschnittsdicke

2.4 Verbundbaustoff Stahlbeton

In den bisherigen Abschnitten wurden die einzelnen Komponenten des Verbundbaustoffs Stahlbeton getrennt voneinander betrachtet. Bei dem hier vorgestellten Modell wird nun die Annahme eingeführt, daß die Verbundwirkung zwischen Beton und Stahl ideal ist. Da entsprechende experimentelle und theoretische Arbeiten zur Klärung des Verbundverhaltens weitgehend fehlen, scheint diese Annahme berechtigt und darüberhinaus für baupraktische Anwendungen auch ausreichend zu sein. Daneben ist es schwierig, für die Analyse größerer Tragwerke

handhabbare Verbundgesetze zu definieren.

Das größte Problem bei dem Einsatz von temperaturbeanspruchten Verbundwerkstoffen, daß sich die vereinigten Partner aufgrund unterschiedlicher Stoffwerte gegeneinander verspannen und daraus Spannungen induziert werden, die zur Zerstörung des Verbundkörpers führen können, wird in dieser Arbeit durch Erfassung der verschiedenen temperaturabhängigen Ausdehnungskoeffizienten, Spannungs-Dehnungs-Beziehungen und der Rißbildung erfaßt.

3. Finite-Element-Beschreibung

3.1 Allgemeines

Das folgende Kapitel befaßt sich mit der Beschreibung eines finiten Elementes, welches zur nichtlinearen Berechnung von Balken- und Plattentragwerken, aber auch von Schalen beliebiger Form geeignet ist. Das Modell basiert auf einem Scheiben- und einem Plattenelement und wurde bereits in früheren Publikationen beschrieben (vgl. LIN /15/, /45/). Es handelt sich um ein geschichtetes, ebenes dreieckiges Weggrößenelement, das die Scheibenweggrößen linear und die Plattendurchbiegung kubisch annähert und aufgrund der Schichtung die Erfassung der nichtlinearen Materialeigenschaften von Stahlbeton ermöglicht.

Im folgenden werden die Grundlagen für die Herleitung des verwendeten Scheiben- und Plattenelementes und des daraus folgenden Schichtenmodells zusammengestellt. Es ist zu erwähnen, daß der im folgenden beschriebene Weg nur für kleine Verzerrungen gültig ist.

3.2 Scheibenelement

3.2.1 Definitionen und Voraussetzungen

Die Beschreibung der Ansätze erfolgt in dimensionslosen Dreieckskoordinaten λ_i , die es erlauben, Punkte innerhalb des Dreiecks unabhängig von der Lage des globalen Koordinatensystems festzulegen. Zwi-

schen diesen Flächenkoordinaten λ_i und den kartesischen Koordinaten (x_i, y_i) gelten folgende Beziehungen (vgl. Bild 3.1):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & | & y_2 - y_3 & | & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & | & y_3 - y_1 & | & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & | & y_1 - y_2 & | & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_P \\ y_P \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

Hierin bezeichnet A die Elementfläche.

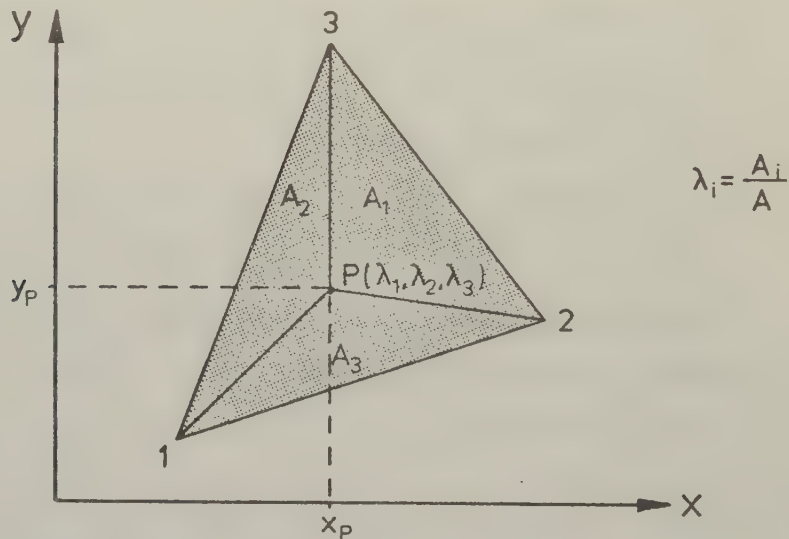


Bild 3.1: Definition der Flächenkoordinaten eines Dreiecks

3.2.2 Verschiebungsansatz

Für Probleme des ebenen Spannungszustandes kann

das vollständige Verschiebungsfeld durch die beiden Komponenten $u(x,y)$ und $v(x,y)$ in globalen Koordinaten ausgedrückt werden. In diesem Fall werden die Verschiebungen linear angenommen:

$$u = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y \quad (3.2.3a)$$

$$v = a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y \quad (3.2.3b)$$

Dieser Ansatz gewährleistet, daß der Verzerrungszustand elementweise konstant erfaßt wird. Da er aus einer vollständigen Polynomfolge der Ordnung 1 besteht, ist das Kriterium der Vollständigkeit erfüllt. Die Verschiebungskomponenten u und v werden dann in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen und in Dreieckskoordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ausgedrückt:

$$u(\lambda_i) = \{\underline{\Phi}\}^T \{\underline{u}\} ; \quad \{\underline{u}\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3\}^T \quad (3.2.4a)$$

$$v(\lambda_i) = \{\underline{\Phi}\}^T \{\underline{v}\} ; \quad \{\underline{v}\} = \{v_1 \ v_2 \ v_3\}^T \quad (3.2.4b)$$

Da die mathematischen Ansatzparameter $a_1, \dots, a_6$ in mechanisch sinnvollen Freiwerten, den 6 diskreten Knotenverschiebungen, erklärt werden können, erfüllt der gewählte Ansatz auch das Verträglichkeitskriterium, d.h. die kinematischen Elementübergangsbedingungen werden an den Elementrändern identisch erfüllt.

3.2.3 Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

Die linearen Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen lauten:

$$\varepsilon_x(\lambda_i) = \frac{\partial u(\lambda_i)}{\partial x} = \{\underline{\phi}_x\}^T \{\underline{u}\} \quad (3.2.5a)$$

$$\varepsilon_y(\lambda_i) = \frac{\partial v(\lambda_i)}{\partial y} = \{\underline{\phi}_y\}^T \{\underline{v}\} \quad (3.2.5b)$$

$$\gamma_{xy}(\lambda_i) = \frac{\partial u(\lambda_i)}{\partial y} + \frac{\partial v(\lambda_i)}{\partial x} = \{\underline{\phi}_y\}^T \{\underline{u}\} + \{\underline{\phi}_x\}^T \{\underline{v}\} \quad (3.2.5c)$$

Da die Ansätze $\{\underline{\phi}\}$ in Dreieckskoordinaten λ_i ausgedrückt sind, muß die Differentiation bezogen auf die globalen Achsen x, y nach der Kettenregel durchgeführt werden. In Matrizenform geschrieben ergibt sich für die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung:

$$\{\underline{\varepsilon}\} = [\underline{H}]\{\underline{v}\} \quad (3.2.6)$$

wobei $\{\underline{\varepsilon}\}$ den Vektor der Verzerrungen, $[\underline{H}]$ die Matrix der linearen Transformation der Ansatzfunktion und $\{\underline{v}\}$ den Vektor der Knotenverschiebungen darstellt.

3.2.4 Steifigkeitsmatrix

Die Elementsteifigkeitsmatrix wird für den homogenen isotropen Werkstoff aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten hergeleitet. Mit dem Vektor der virtuellen Dehnungen ist die innere Arbeit δA^i in Matrizen Schreibweise:

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{\varepsilon}\}^T \{\underline{\sigma}\} dV \quad (3.2.7)$$

Das konstitutive Gesetz zwischen Spannungen $\{\underline{\sigma}\}$ und Verzerrungen $\{\underline{\epsilon}\}$ lautet:

$$\{\underline{\sigma}\} = [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}\} \quad (3.2.8)$$

$[\underline{E}]$ ist die Elastizitätsmatrix.

Werden die hergeleiteten Beziehungen der Verzerrungen in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen eingesetzt, so ergibt sich:

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{v}\}^T [\underline{H}^T] [\underline{E}] [\underline{H}] \{\delta \underline{v}\} dV \quad (3.2.9)$$

$$\delta A^i = - \{\delta \underline{v}\}^T \left(\int_V [\underline{H}^T] [\underline{E}] [\underline{H}] dV \right) \{\delta \underline{v}\} \quad (3.2.10)$$

Da die Verzerrungen dieses Elementes konstant sind, ergibt die Integration bei konstanter Elementdicke h die lokale Steifigkeitsmatrix $[\underline{k}]$ des Scheibenelementes zu:

$$[\underline{k}] = [\underline{H}^T] [\underline{E}] [\underline{H}] \cdot h \cdot A \quad (3.2.11)$$

3.2.5 Lastvektoren

Die auf ein Element wirkenden äußeren Belastungen werden zu statisch äquivalenten Knotenkräften zusammengefaßt. Im Falle von Volumenkräften ergeben sich drei gleiche Knotenlasten.

Temperaturänderungen werden als Anfangsverzerrungen $\{\underline{\epsilon}_0\}$ berücksichtigt, die im gesamten Element als konstant angesehen werden:

$$\{\underline{\epsilon}_0\} = \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot T \\ \alpha_T \cdot T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

Hierbei ist α_T der Wärmeausdehnungskoeffizient und T die Temperaturabweichung von der Bezugstemperatur. Die äquivalenten Knotenkräfte werden wieder aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten bestimmt:

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{\epsilon}\}^T \{\underline{c}\} dV \quad (3.2.13)$$

$$\{\underline{c}\} = [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} \quad (3.2.14)$$

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{v}\}^T [\underline{H}]^T [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} dV \quad (3.2.15)$$

$$\delta A^i = - \{\delta \underline{v}\}^T \underbrace{\int_V [\underline{H}]^T [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} dV}_{\{\underline{q}_T\}} \quad (3.2.16)$$

3.3 Plattenelement

3.3.1 Definitionen und Voraussetzungen

Das hier beschriebene Plattenelement wurde ursprünglich von CLOUGH/TOCHER /52/ entwickelt und später von CLOUGH/FELIPPA /53/ neu formuliert.

Das finite Element ist auf ein rechtshändiges Koordinatensystem bezogen, wobei die Mittelfläche in der x-y-Ebene liegt und die z-Achse positiv nach oben gerichtet ist (Bild 3.2).

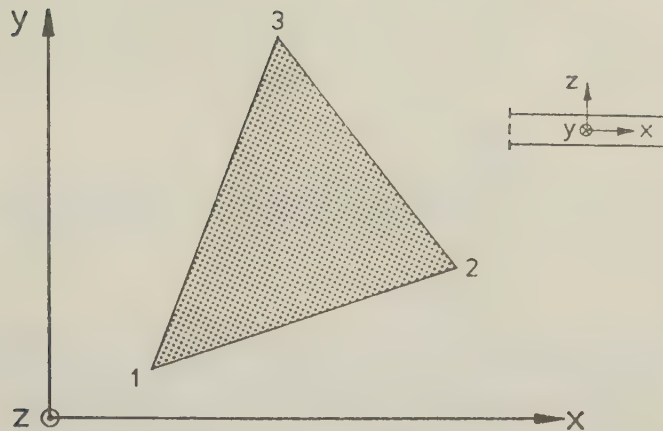


Bild 3.2: Plattenelement in globalen Koordinaten

Der Herleitung des Elementes liegen die kinematischen Annahmen der technischen Plattentheorie dünner Platten zugrunde:

- der Verschiebungsvektor ist nur abhängig von x und y
- es gilt die Kirchhoff-Love-Hypothese (Normalenhypothese), wonach die Schubverformungen vernachlässigt werden
- die Normalspannungen in z -Richtung können vernachlässigt werden
- es werden nur kleine Verschiebungen vorausgesetzt, die ohne Einfluß auf die Gleichgewichtsbedingungen sind (Theorie I. Ordnung)
- es handelt sich um einen homogenen, elastischen und isotropen Werkstoff

3.3.2 Verschiebungsansatz

In Bild 3.3 ist ein beliebiges Dreieckelement 1-2-3

dargestellt, das in drei Teilelemente unterteilt wird. Für jedes dieser drei Teildreiecke wird für die Durchbiegung w ein vollständiger kubischer Polynomansatz mit 10 Freiwerten aufgestellt:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 \quad (3.3.1)$$

Die Verschiebung eines Eck-Knotens hat 3 Komponenten:

$$\{\underline{v}\} = \begin{bmatrix} w \\ \phi_x = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

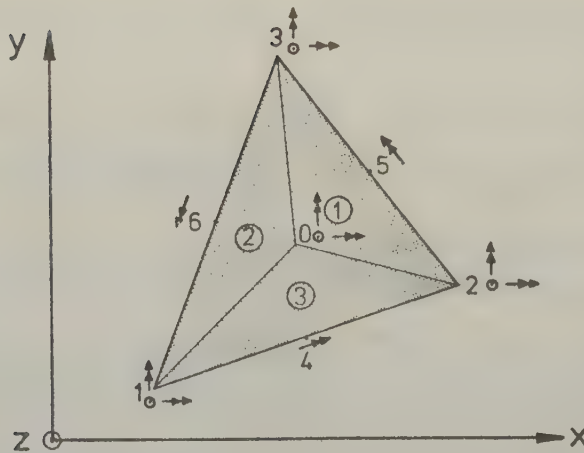


Bild 3.3: Definition der Knotenpunkte, Unterelemente und Freiheitsgrade

Als zusätzlicher Stützwert für die kubische Grundfunktion wird die Kantenverdrehung der Außenseiten in den Randknoten 4, 5, 6 gewählt:

$$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3.3.3)$$

Hierin bezeichnet n die Normalenrichtung.

Die Ableitung des Verschiebungsansatzes für w in Richtung der Normalen ergibt sich aus dem totalen Differential:

$$\phi_n = \frac{\partial w}{\partial n} = \underline{n}^T \cdot \nabla w = \{n_x \ n_y\}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

Damit lassen sich die 10 Freiwerte der Ansatzfunktionen für jedes Teildreieck durch mechanisch anschauliche Zustandsgrößen in den Knoten- und Randpunkten ersetzen. Wird der Interpolationsvektor in Flächenkoordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ angegeben, so ist die Beschreibung der Unterelemente unabhängig von der Lage des globalen Koordinatensystems.

$$w_{(i)} = \{\underline{\phi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}^T \{\underline{v}_{(i)}\} \quad \text{bzw.} \quad (3.3.5)$$

$$w_{(i)} = \{\underline{\phi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}^T \{\underline{v}\} \quad i=1,2,3 \quad (3.3.6)$$

$$\{\underline{v}\} = \{w_1 \ \phi_{x1} \ \phi_{y1} ; w_2 \ \phi_{x2} \ \phi_{y2} ; w_3 \ \phi_{x3} \ \phi_{y3} ; \phi_{n4} \ \phi_{n5} \ \phi_{n6} ; w_0 \ \phi_{x0} \ \phi_{y0}\}^T \quad (3.3.7)$$

Die mechanischen Freiwerte $\{\underline{v}\}$ sind in Bild 3.3 grafisch dargestellt.

Verlangt man als Zwangsbedingung, daß die Kantenverdrehungen der Ränder linear verlaufen, so kann der 10. Freiheitsgrad ϕ_n jedes Teildreiecks durch die Knotenverdrehungen ausgedrückt werden. Daraus folgt, daß das komplette Verschiebungsfeld des Dreiecks 1-2-3 durch die Verschiebungen der Eckpunkte und des Mittelpunktes beschrieben werden kann:

$$w = \{\underline{\phi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}^T \{\underline{v}\} \quad (3.3.8)$$

$$\{v\} = \{w_1 \ \phi_{x1} \ \phi_{y1} ; w_2 \ \phi_{x2} \ \phi_{y2} ; w_3 \ \phi_{x3} \ \phi_{y3} ; w_0 \ \phi_{x0} \ \phi_{y0}\}^T \quad (3.3.9)$$

Aufgrund der gewählten 12 Freiheitsgrade wird die Kompatibilität der Verschiebungsfelder entlang der Kanten 1-0, 2-0, 3-0 von vornherein erfüllt. Um die Freiheitsgrade des Schwerpunktes 0 zu eliminieren, d.h. durch die 9 Knotenfreiheitsgrade auszudrücken, werden drei Übergangsbedingungen zwischen den Teildreiecken benötigt. Dazu dient die Forderung nach Verträglichkeit der Querneigungen an den Innenkanten zweier benachbarter Unterelemente. Damit ist die innere und äußere Verträglichkeit erfüllt, und das Verschiebungsfeld des ebenen Dreieckselementes kann durch die äußeren Knotenfreiheitsgrade ausgedrückt werden:

$$w = [\underline{\phi}]^T [\underline{v}] \quad (3.3.10)$$

$$\{v\} = \{w_1 \ \phi_{x1} \ \phi_{y1} ; w_2 \ \phi_{x2} \ \phi_{y2} ; w_3 \ \phi_{x3} \ \phi_{y3}\}^T \quad (3.3.11)$$

3.3.3 Verkrümmungs-Verschiebungs-Beziehung

Da die Ansätze für die Durchbiegungen jedes Teildreiecks kubische Polynome sind, verlaufen die Krümmungen linear. Die Verkrümmungs-Verschiebungs-Beziehung erhält man durch zweimalige Differentiation des Interpolationsvektors $\{\underline{\phi}\}$ nach den globalen Koordinaten x, y .

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.3.12a)$$

$$\kappa_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.3.12b)$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.3.12c)$$

Da die Interpolationsfunktionen in jedem Unterelement in Flächenkoordinaten ausgedrückt sind, muß die Kettenregel angewendet werden. Werden die Dreieckskoordinaten der Knotenpunkte eingesetzt, so ergibt sich die Matrizenform:

$$\{\underline{\kappa}\} = [\underline{H}]\{\underline{v}\} \quad (3.3.13)$$

mit dem Vektor der Verkrümmungen und Verwindungen $\{\underline{\kappa}\}$, der Matrix der Transformation der Ansatzfunktionen $[\underline{H}]$ und dem Vektor der Knotenfreiheitsgrade $\{\underline{v}\}$.

Aufgrund der getroffenen Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte ergeben sich die Verzerrungen aus den Verkrümmungen zu:

$$\{\underline{\varepsilon}\} = -z \{\underline{\kappa}\} \quad (3.3.14)$$

$$\{\underline{\varepsilon}\} = -z [\underline{H}]\{\underline{v}\} \quad (3.3.15)$$

3.3.4 Elementsteifigkeitsmatrix

Die Elementsteifigkeitsmatrix $[k]$ ergibt sich aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{\epsilon}\}^T \{\underline{\sigma}\} dV \quad (3.3.16)$$

$$\{\underline{\sigma}\} = [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}\} = -z [\underline{E}] [\underline{H}] \{\underline{v}\} \quad (3.3.17)$$

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{v}\}^T [\underline{H}]^T [\underline{E}] [\underline{H}] \{\underline{v}\} z^2 dV \quad (3.3.18)$$

$$\delta A^i = - \{\delta \underline{v}\}^T \left(\underbrace{\int_V [\underline{H}]^T [\underline{E}] [\underline{H}] z^2 dV}_{[k]} \right) \{\underline{v}\} \quad (3.3.19)$$

$$\delta A^i = - \{\delta \underline{v}^T\} \left(\int_A [\underline{H}]^T \int_z [\underline{E}] z^2 dz [\underline{H}] dA \right) \{\underline{v}\} \quad (3.3.20)$$

Da die elastischen Eigenschaften und die Dicke h des Elementes konstant vorausgesetzt werden, kann die Integration über die Höhe unabhängig durchgeführt werden:

$$[k] = \int_A [\underline{H}]^T \frac{h^3}{12} [\underline{E}] [\underline{H}] dA \quad (3.3.21)$$

Die numerische Integration gestaltet sich für die programmtechnische Aufbereitung relativ einfach, da die Matrix $[\underline{H}]$ in Dreieckskoordinaten vorliegt.

3.3.5 Lastvektoren

Eine auf das Element außerhalb eines Knotenpunktes wirkende Last wird so auf die Eckpunkte aufgeteilt, daß die angreifende Belastung dieselbe virtuelle Arbeit leistet wie die kinematisch äquivalenten Knotenkräfte. Anfangsdehnungen, z.B. infolge Temperaturbeanspruchung, werden ebenfalls als Knotenkräfte berücksichtigt, wie dies bereits bei dem Scheibenelement hergeleitet wurde.

3.4 Schalenelement

3.4.1 Allgemeines

Die Idealisierung von Schalentragerwerken mit Hilfe finiter Elemente kann auch durch ebene Elemente vorgenommen werden. Da die Schalengeometrie dabei nicht in die Ausdrücke für die Elementverzerrungen einbezogen wird, werden die Starrkörperbewegungen der Elemente exakt erfaßt. Dreieckselemente haben gegenüber Viereckselementen den entscheidenden Vorteil, daß mit ihnen allgemeine Schalenformen abgebildet werden können und daß sie eine beliebige Verfeinerung der Netzeinteilung zulassen. Die Schale wird als facettenartiges Faltwerk idealisiert, wobei die Eckpunkte eines finiten Elementes durch Punkte auf der Schalenmittelfläche bestimmt sind. Die Elementbeschreibung muß sowohl die Membran- als auch die Biegewirkung berücksichtigen. Bei ebenen Elementen gestaltet sich diese Aufgabe jedoch relativ einfach. Die Steifigkeitsmatrix entsteht durch Überlagerung der bekannten

Beziehungen von Scheiben- und Plattenelement, wie sie in den vorigen Abschnitten hergeleitet wurden (Bild 3.4).

Da die zur Beschreibung der Plattenwirkung benutzten Verformungsgrößen keinen Einfluß auf den ebenen Spannungszustand haben und umgekehrt, sind die Steifigkeitsbeziehungen zwischen Biege- und Membranwirkung am Element entkoppelt.

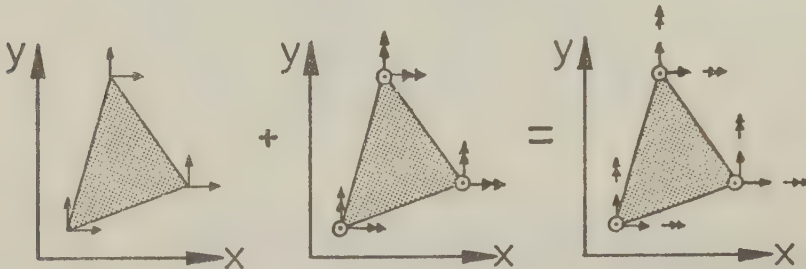


Bild 3.4: Modell des Schalenelementes

Die Schalenwirkung, d.h. die Kopplung zwischen den Membran- und Biegegrößen, wird bei dieser Finiten-Element-Idealisierung allein durch die Transformation unmittelbar benachbarter ebener Elemente bewirkt.

$$[k] = \begin{bmatrix} \underline{k}_{mm} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{k}_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

Hierin bezeichnet $\underline{k}_{mm}$ die Steifigkeitsmatrix des Scheibenelementes und $\underline{k}_{bb}$ die des Plattenelementes.

3.4.2 Geometrische Beschreibung des Schalenelementes

Um das ebene Platten-Scheiben-Element für die numerische Untersuchung von allgemeinen Schalenträgwerken anwenden zu können, ist es notwendig, die Elementbeschreibung zu transformieren.

Zuerst wird ein globales Koordinatensystem X, Y, Z gewählt, das eine passende Beschreibung der Punkte auf der Schalenmittelfläche der betrachteten Schale erlaubt (vgl. Bild 3.5). Hierbei können auch krummlinige Koordinaten, z.B. Polar- oder Zylinderkoordinaten verwendet werden, aus denen dann die kartesischen Koordinaten X, Y, Z eines jeden Punktes ermittelt werden.

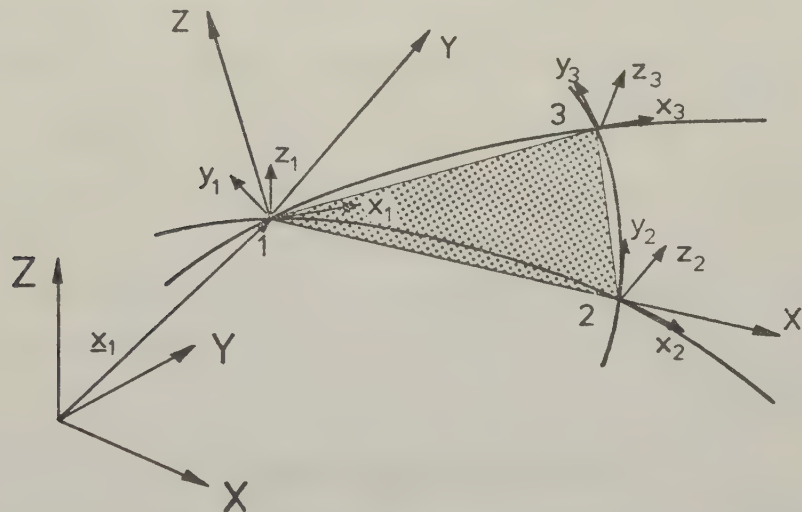


Bild 3.5: Koordinatensysteme der Finiten-Element-Idialisierung

Zur Beschreibung der individuellen Elementeigenschaften ist für jedes finite Element ein lokales Bezugssystem x, y, z erforderlich, dessen Ursprung dem Punkt 1 des Dreiecks zugeordnet wird und dessen x -Achse entlang der Seite 3 verläuft. Die y -Achse liegt senkrecht zur x -Achse in der Element-

ebene, während die z-Richtung normal zur Ebene steht. Die lokalen Elementkoordinaten sind mit den globalen Koordinaten über die Matrix der jeweiligen Richtungscosini zwischen Element- und Raumbasisvektoren verknüpft. Die Richtung der x-Achse ist durch die Punkte 1 und 2 bestimmt:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{l_3} \cdot \{ \underline{x}_2 - \underline{x}_1 \} \quad (3.4.2)$$

Aus der Bedingung, daß die z-Richtung senkrecht auf der Elementebene steht, läßt sich der Einheitsvektor $\underline{e}_3$ über das Kreuzprodukt der Seiten 3 und 2 und anschließende Normierung berechnen:

$$\underline{e}_3 = \frac{1}{|\underline{e}_3|} \cdot \{ (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) \times (\underline{x}_3 - \underline{x}_1) \} \quad (3.4.3)$$

Die y-Richtung erhält man daraufhin aus dem Vektorprodukt der Einheitsvektoren $\underline{e}_3$ mit $\underline{e}_1$:

$$\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 \quad (3.4.4)$$

Ist die lokale Basis bekannt, so ergibt sich die Matrix der Richtungscosini aus der Definition des Skalarproduktes:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\angle \underline{a}, \underline{b}) \quad (3.4.5)$$

$$\cos(\angle \underline{a}, \underline{b}) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} \quad (3.4.6)$$

Damit ist die Transformationsvorschrift zwischen dem globalen Bezugssystem X,Y,Z und den lokalen Koordinaten x,y,z bekannt:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\underline{T}_{eg}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

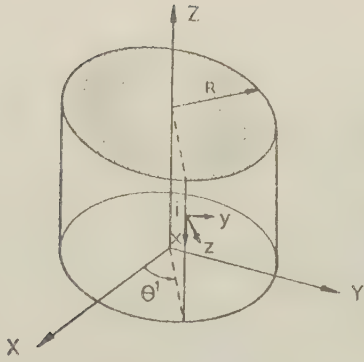
Der Index e bezeichnet die Elementgrößen, der Index g die globalen Größen.

Um die jeweiligen benachbarten Elemente innerhalb des Tragwerks zusammenzubauen, ist die Einführung eines dritten Koordinatensystems erforderlich. Deshalb wird ein schiefes Koordinatensystem x_i, y_i, z_i für jeden Punkt i des Schalentragwerkes in der Weise eingeführt, daß die Richtungen x_i und y_i tangential zur Schalenmittelfläche liegen und die z_i -Achse normal dazu steht. Die Richtungskosini für die einzelnen Punkte können nach demselben Verfahren berechnet werden, welches bereits für die Verknüpfung der Elementkoordinaten mit den globalen Koordinaten beschrieben wurde.

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = [\underline{T}_{ag}^i] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

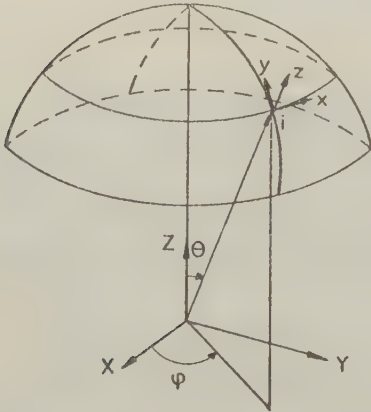
Hierin bezeichnet der Index a die Schalengrößen.

Da die Transformationen zwischen Raumkoordinaten und krummlinigen Flächenkoordinaten von der Geometrie der zu untersuchenden Schale abhängig sind, muß die Matrix $[\underline{T}_{ag}^i]$ für jede Schalenform neu ermittelt werden. Beispielfhaft werden die Transformationsbeziehungen für eine Zylinderschale und einen Rotationshyperboloid unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und für eine Kugelschale bei Einführung von Polarkoordinaten in Bild 3.6 wiedergegeben.



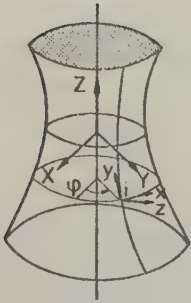
$$[I_{ag}^I] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin\theta^I & \cos\theta^I & 0 \\ \cos\theta^I & \sin\theta^I & 0 \end{bmatrix}$$

(3.4.9)



$$[I_{ag}^I] = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\theta \cdot \cos\varphi & -\cos\theta \cdot \sin\varphi & \sin\theta \\ \sin\theta \cdot \cos\varphi & \sin\theta \cdot \sin\varphi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(3.4.10)



$$R = \frac{a}{b} \sqrt{z^2 + b^2}$$

$$\alpha = \frac{a^2}{b^2}$$

$$[I_{ag}^I] = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \frac{\alpha z}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + R^2}} \cos\varphi & \frac{\alpha z}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + R^2}} \sin\varphi & \frac{R}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + R^2}} \\ \frac{R}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + R^2}} \cos\varphi & \frac{R}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + R^2}} \sin\varphi & -\frac{\alpha z}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + R^2}} \end{bmatrix}$$

(3.4.11)

Bild 3.6: Transformationsbeziehungen für Zylinder- und Kugelschale und Rotationshyperboloid

Da die Basisvektoren der Flächenkoordinaten für Zylinder, Rotationshyperboloid und Kugel senkrecht aufeinander stehen, können die Transformationsmatrizen anhand charakteristischer Eigenschaften kontrolliert werden (vgl. z.B. BRONSTEIN /46/):

- die Determinante hat den Wert +1,
- die Summe der Quadrate der Elemente einer Zeile oder Spalte ist gleich 1,
- die Summe der Produkte der entsprechenden Elemente zweier Zeilen oder Spalten ist gleich 0 (Orthogonalitätsbedingung).

Um die gewünschte Beziehung zwischen Element- und Flächenkoordinaten zu erhalten, sind folgende Matrizenoperationen erforderlich:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = [\underline{T}_{ag}^i] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\underline{T}_{ag}^i]^T \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.4.12)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\underline{T}_{eg}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = ([\underline{T}_{eg}] [\underline{T}_{ag}^i]^T) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.4.13)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\underline{T}_{ea}^i] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.4.14)$$

3.4.3 Transformation der Elementmatrizen

Mit der Transformationsbeziehung $[\underline{T}_{ea}^i]$ zwischen den lokalen und den krummlinigen Koordinaten lassen sich die definierten Knotenverschiebungen in den drei Knoten jedes Elementes durch die globalen Weggrößen auf der Schalenmittelfläche ausdrücken. Da das verwendete Scheiben-Platten-Element nicht die Verdrehung um die z-Achse beinhaltet, ergibt sich als Transformationsbeziehung für jeden Knoten i eine 5x5 Matrix, wobei die Transformation der beiden Verdrehungen $[\underline{\bar{T}}_{ea}^i]$ gleich dem linken oberen 2x2 Block von $[\underline{T}_{ea}^i]$ ist:

$$[\underline{T}^i] = \begin{bmatrix} \underline{T}_{ea}^i & | & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & | & \underline{\bar{T}}_{ea}^i \end{bmatrix} \quad (3.4.15)$$

Die vollständige Transformationsmatrix ist eine Diagonalmatrix mit den Untermatrizen der entsprechenden Transformationen in den Knotenpunkte des Elementes.

$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} \underline{T}^1 & | & & | \\ \hline & & \underline{T}^2 & | \\ \hline & & & \underline{T}^3 \end{bmatrix} \quad (3.4.16)$$

$$\{\underline{v}_e\} = \{[\underline{T}]\} \cdot \{\underline{v}_a\} \quad (3.4.17)$$

Die auf die globalen Flächenkoordinaten $\{\underline{v}_a\}$ transformierten Elementbeziehungen erhält man, indem innere und äußere Arbeit eines Elementes in diesen Weggrößen ausgedrückt werden:

$$\delta A = \{\delta \underline{v}_e^T\} [\underline{\bar{k}}] \{\underline{v}_e\} - \{\delta \underline{v}_e^T\} \{\underline{\bar{q}}\} \quad (3.4.18)$$

$$\begin{aligned} \delta A = & \delta([\underline{T}]\{\underline{v}_a\})^T [\underline{\bar{k}}] ([\underline{T}]\{\underline{v}_a\}) \\ & - \delta([\underline{T}]\{\underline{v}_a\})^T \{\underline{\bar{q}}\} \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

$$\delta A = \underbrace{\{\delta \underline{v}_a^T\} [\underline{T}]}_{[\underline{k}]} \underbrace{[\underline{\bar{k}}] [\underline{T}]\{\underline{v}_a\}}_{\{\underline{q}\}} - \underbrace{\{\delta \underline{v}_a^T\} [\underline{T}]}_{[\underline{k}]} \underbrace{\{\underline{\bar{q}}\}}_{\{\underline{q}\}} \quad (3.4.20)$$

$[\underline{\bar{k}}]$ und $\{\underline{\bar{q}}\}$ sind die lokalen Elementbeziehungen,
 $[\underline{k}]$ und $\{\underline{q}\}$ sind die auf die Flächenkoordinaten
bezogenen Größen.

Infolge der geometrischen Approximation der Schalengeometrie durch ebene Elemente erfüllen die Verschiebungsfunktionen im allgemeinen nicht mehr das Verträglichkeitskriterium, obwohl dies für das Membran- und das Plattenelement bei ebenen Systemen zutrifft. Durch die Transformationen entstehen aus der Durchbiegung Unverträglichkeiten in den Übergangsbedingungen, die nicht durch die Membranansätze behoben werden können. Dieser Einfluß auf die Lösung ist jedoch gering und verschwindet mit zunehmender Anzahl von Elementen (vgl. ZIENKIEWICZ /47/). Auch haben die Ergebnisse von Schalenberechnungen gezeigt, daß sich unter Verwendung ebener Elemente ausgezeichnete Lösungen für allgemeine Schalengeometrien erzielen lassen (vgl. ZIENKIEWICZ /47/).

3.5 Geschichtetes Element

3.5.1 Voraussetzungen

Die der Herleitung des Plattenelementes zugrunde liegenden Voraussetzungen und Annahmen werden für das Schichtenmodell wie folgt geändert bzw. ergänzt:

1. Jede Schicht eines Elementes kann unterschiedliche elastische und thermische Koeffizienten haben.
2. Das Werkstoffverhalten wird durch eine lineare Spannungs-Verzerrungs-Beziehung genügend genau beschrieben.
3. Im Beton liegt ein zweiaxialer, im Stahl ein einaxialer Spannungszustand vor.
4. Es gibt eine Bezugsschicht, aus deren Verformungen alle übrigen Schichten hinsichtlich ihres Verzerrungszustandes beschrieben werden können.
5. Die Bezugsschicht kann beliebig gewählt werden.

Das Modell des dreieckigen Schichtenelementes, das man sich aus mehreren übereinanderliegenden Einzelelementen zu einem Makroelement zusammengesetzt denken kann, ist in Bild 3.7 dargestellt.

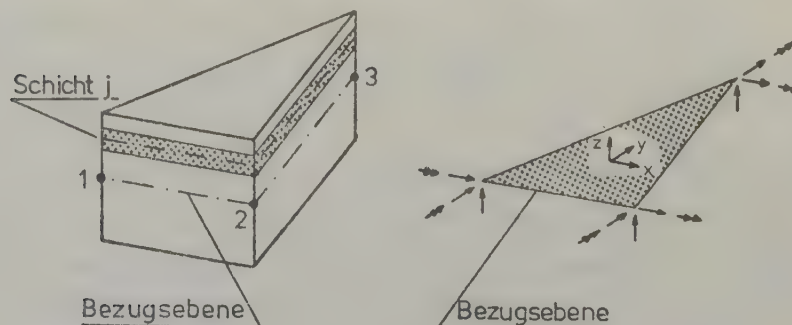


Bild 3.7: Modell des Schichtenelementes und Freiheitsgrade der Bezugsebene

3.5.2 Ableitung der Elementsteifigkeitsmatrix

Im folgenden Abschnitt sollen die Schritte erläutert werden, die es ermöglichen, die Steifigkeitsmatrix eines Schichtenelementes mit wenig Aufwand aus den bekannten Elementbeziehungen des behandelten Scheiben- und Plattenelementes herzuleiten. Grundlage bilden dabei die Veröffentlichungen von HAND/PECKNOLD/SCHNOBRICH /11/, LIN /15/ und LINK/MEHLHORN/SCHÄFER /12/.

Infolge der getroffenen Love'schen Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte lassen sich die Verzerungen im Abstand z der Bezugsfläche folgendermaßen ausdrücken:

$$\epsilon_x = \epsilon_x^0 - z \cdot \kappa_{xx}^0 \quad (3.5.1a)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y^0 - z \cdot \kappa_{yy}^0 \quad (3.5.1b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - z \cdot 2 \cdot \kappa_{xy}^0 \quad (3.5.1c)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ 2\kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

$$\{\underline{\epsilon}\} = [\underline{G}] \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}^0 \\ \underline{\kappa}^0 \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

Hierbei bezeichnet $\{\underline{\varepsilon}\}$ die Verzerrungen einer beliebigen Schicht, $[\underline{G}]$ ist eine Operatorenmatrix und der Index $()^0$ kennzeichnet die Verzerrungen bzw. Verkrümmungen und Verwindungen der Bezugsschicht.

Die Verzerrungen und Verkrümmungen der Bezugsschicht können durch die Verformungsgrößen der Knotenpunkte ausgedrückt werden, indem die Formfunktionen differenziert werden. Die Differentialmatrizen der Membran- und Biegegrößen, $[\underline{H}_M]$ bzw. $[\underline{H}_B]$, entsprechen dabei denen des beschriebenen Scheiben- und Plattenelementes.

$$\{\underline{\varepsilon}^0\} = [\underline{H}_M] \{\underline{v}_M^0\} \quad (3.5.4)$$

$$\{\underline{\chi}^0\} = [\underline{H}_B] \{\underline{v}_B^0\} \quad (3.5.5)$$

Die letzte Beziehung, die nötig ist, um die Elementsteifigkeitsmatrix herzuleiten, ist die Verknüpfung von Spannungen und Verzerrungen der einzelnen Schichten.

$$\{\underline{\sigma}\} = [\underline{E}] \{\underline{\varepsilon}\} \quad (3.5.6)$$

Wendet man das Prinzip der virtuellen Arbeiten an, so ergibt sich:

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{\varepsilon}\}^T \{\underline{\sigma}\} dV \quad (3.5.7)$$

$$\delta A^i = - \int_V \begin{bmatrix} \delta \underline{v}_M^0 \\ \delta \underline{v}_B^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{H}_M & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B \end{bmatrix} [\underline{G}]^T [\underline{E}] [\underline{G}] \begin{bmatrix} \underline{H}_M & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_M^0 \\ \underline{v}_B^0 \end{bmatrix} dV \quad (3.5.8)$$

$$\delta A^i = - \begin{bmatrix} \delta v_M^0 \\ \delta v_B^0 \end{bmatrix}^T \int_A \begin{bmatrix} H_M & 0 \\ 0 & H_B \end{bmatrix}^T \left(\int_z [G]^T [E] [G] dz \right) \begin{bmatrix} H_M & 0 \\ 0 & H_B \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} v_M^0 \\ v_B^0 \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

Führt man die Matrizenmultiplikation $[G]^T [E] [G]$ durch, so erhält man:

$$[E'] = [G]^T [E] [G] = \begin{bmatrix} [E] & -z[E] \\ -z[E] & z^2[E] \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

Wird diese Matrix wieder in den Ausdruck für die innere Arbeit eingesetzt, so erkennt man sofort die Analogie zu den bekannten Formen der Steifigkeitsmatrizen für ungeschichtete Elemente (vgl. Gl. 3.3.20):

$$\delta A^i = - \underbrace{\begin{bmatrix} \delta v \end{bmatrix}^T \left(\int_A [H]^T \int_z [E'] dz [H] dA \right) \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}}_{[k]} \quad (3.5.11)$$

Da vorausgesetzt wurde, daß die Materialeigenschaften über die jeweiligen Schichtdicken konstant seien, kann die Integration über jede Schicht sofort ausgeführt werden, und die konstitutive Beziehung für das Schichtenmodell ergibt sich als Summation über die Anzahl der unterschiedlichen Werkstoffe.

$$\int_z [E'] dz = \int_{t_1}^{t_2} [E'] dz + \int_{t_2}^{t_3} [E'] dz + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} [E'] dz \quad (3.5.12)$$

$$\int_z [\underline{E}'] dz = \begin{bmatrix} \sum_j (t_{j+1} - t_j) [\underline{E}_j] & \sum_j -\frac{1}{2} (t_{j+1}^2 - t_j^2) [\underline{E}_j] \\ \sum_j -\frac{1}{2} (t_{j+1}^2 - t_j^2) [\underline{E}_j] & \sum_j \frac{1}{3} (t_{j+1}^3 - t_j^3) [\underline{E}_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{MM} & \underline{E}_{MB} \\ \underline{E}_{BM} & \underline{E}_{BB} \end{bmatrix} \quad (3.5.13)$$

Die Steifigkeitsmatrix eines geschichteten Elementmodells kann demnach folgendermaßen bestimmt werden:

$$[\underline{k}] = \int_A \begin{bmatrix} \underline{H}_M & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{E}_{MM} & \underline{E}_{MB} \\ \underline{E}_{BM} & \underline{E}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{H}_M & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B \end{bmatrix} dA \quad (3.5.14)$$

$$[\underline{k}] = \int_A \begin{bmatrix} \underline{H}_M^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{H}_M^T \underline{E}_{MM} & \underline{H}_M^T \underline{E}_{MB} \\ \underline{H}_B^T \underline{E}_{BM} & \underline{H}_B^T \underline{E}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{H}_M^T \underline{E}_{MM} \underline{H}_M & \underline{H}_M^T \underline{E}_{MB} \underline{H}_B \\ \underline{H}_B^T \underline{E}_{BM} \underline{H}_M & \underline{H}_B^T \underline{E}_{BB} \underline{H}_B \end{bmatrix} dA \quad (3.5.15)$$

$$[\underline{k}] = \int_A \begin{bmatrix} \underline{H}_M^T \underline{E}_{MM} \underline{H}_M & \underline{H}_M^T \underline{E}_{MB} \underline{H}_B \\ \underline{H}_B^T \underline{E}_{MB} \underline{H}_M & \underline{H}_B^T \underline{E}_{BB} \underline{H}_B \end{bmatrix} dA \quad (3.5.16)$$

$$[\underline{k}] = \begin{bmatrix} \underline{k}_{MM} & \underline{k}_{MB} \\ \underline{k}_{BM} & \underline{k}_{BB} \end{bmatrix} \quad (3.5.17)$$

Die Untermatrizen $[k_{MM}]$ und $[k_{BB}]$ sind die bekannten Scheiben- und Plattensteifigkeiten, die Matrizen $[k_{MB}]$ und $[k_{BM}]$ stellen die Kopplung zwischen Membran- und Biegegrößen dar. Für Schichtungen, die zur Mittelfläche symmetrisch sind, verschwinden die Koppelglieder. Dies entspricht auch genau der klassischen Plattentheorie, die keinen Einfluß der Plattenwirkung auf den ebenen Spannungszustand wiedergibt.

3.5.3 Ableitung der Knotenlastvektoren

Die Erfassung der äußeren Belastung erfolgt nach demselben Prinzip, wie dies bei der Behandlung von Scheiben- und Plattenelementen erläutert wurde. Dabei werden unabhängig von der Schichtung die Belastungen zu äquivalenten Knotenkräften zusammengefaßt und der Bezugsschicht zugeordnet. Da das Element sowohl die Membran- als auch die Biegewirkung berücksichtigt, ergeben sich analog zu den 5 Freiheitsgraden jedes Knotens, ausgedrückt in Schalenkoordinaten, auch fünf Lastkomponenten, deren Reihenfolge und positive Richtung den im Verformungsvektor $\{\underline{v}\}$ stehenden Verformungsparametern entspricht.

Verzerrungen infolge einer beliebigen Temperaturverteilung über den Querschnitt werden für jede Elementschicht als vorgegebener Anfangszustand betrachtet. Wenn die Schichtdicken genügend klein gewählt werden, können die Anfangsverzerrungen im allgemeinen durch einen konstanten Mittelwert ausgedrückt werden (Bild 3.8).

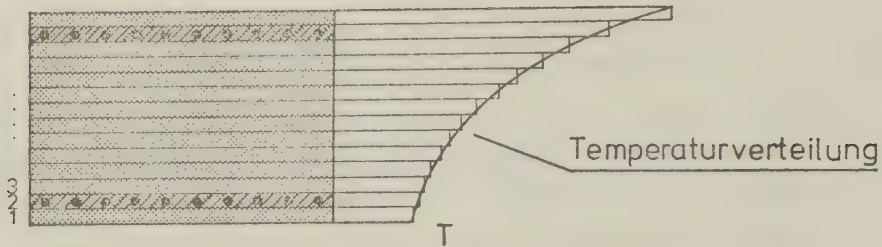


Bild 3.8: Idealisierung einer beliebigen Temperaturverteilung über dem Querschnitt

Die Verzerrungen in den Schichtmitten sind im Falle des vorausgesetzten ebenen Spannungszustandes:

$$\{\underline{\epsilon}_0\} = \begin{bmatrix} \alpha_T \cdot T \\ \alpha_T \cdot T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.18)$$

Die fiktiven Spannungen ergeben sich daraus wie folgt:

$$\{\underline{\sigma}\} = [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} \quad (3.5.19)$$

Sie können in Knotenkräften ausgedrückt werden, wenn man das Prinzip der virtuellen Arbeiten anwendet:

$$\delta A^i = - \int_V \{\delta \underline{\epsilon}\}^T \{\underline{\sigma}\} dV \quad (3.5.20)$$

$$\delta A^i = - \int_V \begin{bmatrix} \delta v_M^0 \\ \delta v_B^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{H}_M & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B \end{bmatrix}^T [\underline{G}]^T [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} dV \quad (3.5.21)$$

$$\delta A^i = - \begin{bmatrix} \delta v_M^0 \\ \delta v_B^0 \end{bmatrix}^T \int_A \begin{bmatrix} \underline{H}_M & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B \end{bmatrix}^T \left(\int_z [\underline{G}]^T [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} dz \right) dA \quad (3.5.22)$$

Die Integration über die Dicke kann unabhängig von derjenigen über die Fläche durchgeführt werden. Wird das Schichtenkonzept berücksichtigt, so ergibt sich:

$$[\underline{G}]^T [\underline{E}] = \begin{bmatrix} [\underline{E}] \\ -z[\underline{E}] \end{bmatrix} \quad (3.5.23)$$

$$\int_z [\underline{G}]^T [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} dz = \int_z \begin{bmatrix} [\underline{E}] \\ -z[\underline{E}] \end{bmatrix} \{\underline{\epsilon}_0\} dz = \int_z \begin{bmatrix} [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} \\ -z[\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} \end{bmatrix} dz \quad (3.5.24)$$

$$\int_z [\underline{G}] [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} dz = \begin{bmatrix} \sum_j (t_{j+1} - t_j) [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} \\ \sum_j -\frac{1}{2} (t_{j+1}^2 - t_j^2) [\underline{E}] \{\underline{\epsilon}_0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{0M} \\ \underline{Q}_{0B} \end{bmatrix} \quad (3.5.25)$$

Den äquivalenten Knotenkraftvektor $\{\underline{q}_T\}$ bekommt man daraus zu:

$$\{\underline{q}_T\} = \int_A \begin{bmatrix} \underline{H}_M & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{Q}_{0M} \\ \underline{Q}_{0B} \end{bmatrix} dA \quad (3.5.26)$$

$$\{\underline{q}_T\} = \begin{bmatrix} \int_A [\underline{H}_M]^T \{\underline{Q}_{0M}\} dA \\ \int_A [\underline{H}_B]^T \{\underline{Q}_{0B}\} dA \end{bmatrix} \quad (3.5.27)$$

$$\{\underline{q}_T\} = \begin{bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{bmatrix} \quad (3.5.28)$$

3.5.4 Ableitung der Spannungen

Bevor die Spannungen bei Schalenstrukturen ermittelt werden, müssen die lokalen Elementverformungen $\{\underline{v}_e\}$ aus den globalen Verformungen $\{\underline{v}_a\}$ transformiert werden (vgl. Gl. 3.4.17):

$$\{\underline{v}_e\} = \{\underline{T}\} \cdot \{\underline{v}_a\} \quad (3.5.29)$$

Um die Spannungen in den einzelnen Schichten jedes Elementes bestimmen zu können, ist es erforderlich, zuerst die Verzerrungen der Schichten zu errechnen. Wie aus den ersten Abschnitten bekannt ist, lassen sich die Verzerrungen und Verkrümmungen der Bezugsfläche in Abhängigkeit der diskreten Knotenverschiebungen wie folgt ausdrücken:

$$\{\underline{\epsilon}^o\} = \begin{bmatrix} \underline{H}_M & | & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & | & \underline{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_M^o \\ \hline \underline{v}_B^o \end{bmatrix} \quad (3.5.30)$$

Aufgrund der Annahme der Love'schen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte lassen sich die Dehnungen einer Schicht j aus dem Verzerrungszustand der Bezugsfläche ableiten. Wenn die Dicke der Schichten hinreichend klein ist, können die Dehnungen über die jeweilige Schichthöhe konstant vorausgesetzt werden. Kennzeichnend für die Schichten werden die Dehnungen der Mittelflächen berechnet (siehe Bild 3.9):

$$\{\underline{\epsilon}\} = \{\underline{\epsilon}^o\} - \frac{1}{2} (t_{j+1} + t_j) \{\underline{\kappa}^o\} \quad (3.5.31)$$

Unter Anwendung des jeweiligen Werkstoffgesetzes

für die Schicht j können die Spannungen aus den repräsentativen Dehnungen der Schichtmitten berechnet werden (Bild 3.9).

$$\{\underline{\sigma}\} = [\underline{E}_j] (\{\underline{\varepsilon}\} - \{\underline{\varepsilon}_0\}) + \{\underline{\sigma}_0\} \quad (3.5.32)$$

$\{\underline{\varepsilon}_0\}$ kennzeichnet hierbei den Vektor von Anfangsspannungen. Aus den ermittelten diskreten Spannungswerten können durch Summation über den Querschnitt die Normalkräfte und Momente bestimmt werden.

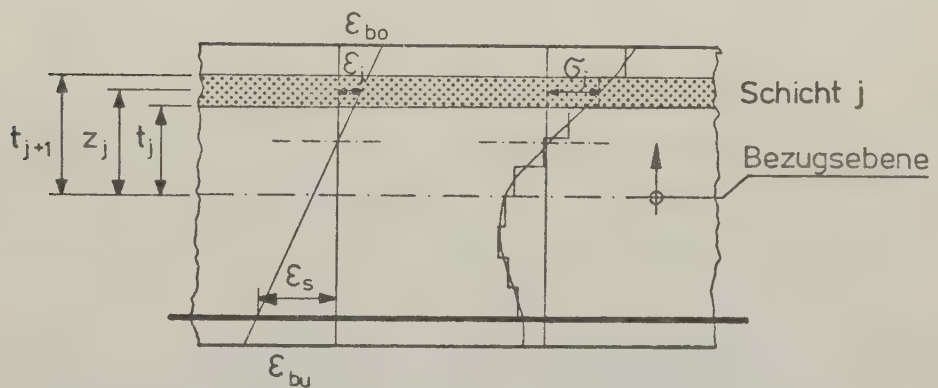


Bild 3.9: Dehnungen und Spannungen des Schichtenmodells

4. Nichtlineare Rechnung

4.1 Allgemeines

Den bisher besprochenen Aufgabenstellungen der Aufstellung eines Spannungs-Dehnungs-Gesetzes für den zweiachsigen Spannungszustand und der Entwicklung eines finiten Elementes lagen lineare Verhältnisse zugrunde. Berücksichtigt man die Rißbildung bei Stahlbeton, so kann eine lineare Abhängigkeit in dem Werkstoffverhalten nicht mehr aufrechterhalten werden. In dem folgenden Kapitel soll gezeigt werden, daß die bereits verwandten Methoden der Arbeits- und Variationsprinzipien auch bei einer nichtlinearen Form von Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen gültig sind. Dabei wird die Lösung iterativ bestimmt, bis ein neues Stoffgesetz und ein Gleichgewichtszustand in geeigneter Weise erfüllt sind.

Dies macht gegenüber einem linearen Rechenablauf eine Neuformulierung des numerischen Verfahrens erforderlich.

4.2 Numerisches Verfahren

Wenn in der Spannungs- und Verformungsermittlung von temperaturbeanspruchten Stahlbetonschalen Bewehrungsführung und Risseentwicklung sowie das temperaturabhängige Materialverhalten berücksichtigt werden sollen, sind besondere Berechnungsmethoden erforderlich.

Bei der Finiten-Element-Formulierung im linearen Fall wurde die Gleichgewichtsaussage folgendermaßen geschrieben:

$$[\underline{K}]\{\underline{V}\} - \{\underline{Q}\} = \{\underline{0}\} \quad (4.2.1)$$

Bei Problemen mit nichtlinearen Stoffgesetzen ist die Systemsteifigkeitsmatrix $[\underline{K}]$ eine Funktion der Verformungen $\{\underline{V}\}$:

$$[\underline{K}(\{\underline{V}\})]\{\underline{V}\} - \{\underline{Q}\} = \{\underline{0}\} \quad (4.2.2)$$

Diese Gleichung kann natürlich nicht unmittelbar ausgewertet werden, sondern erfordert eine umfangreiche numerische Rechnung. Sie kann als Differentialgleichungssystem erster Ordnung aufgefaßt werden, das auf verschiedene Weise iterativ gelöst werden kann. Dabei muß die Anwendung des beanspruchungs- und temperaturabhängigen Materialverhaltens bei der nichtlinearen rechnerischen Untersuchung zusätzlich durch eine inkrementelle Lasterhöhung berücksichtigt werden, da die Lösung infolge der Spannungsumlagerung der Zwangsbeanspruchung vom Weg abhängig ist.

In dem hier betrachteten Fall wird, da es sich um temperaturbeeinflusste Steifigkeiten handelt, ein inkrementelles Tangentensteifigkeitsverfahren zusammen mit einer iterativen Methode zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen verwendet, um die Nichtlinearität in den Materialeigenschaften einzuführen. Die Methode ist aus den Arbeiten von HAND/PECKNOLD/SCHNOBRICH /11/ und LIN /15/ über-

nommen worden und aufgrund der Temperaturabhängigkeit des Materialverhaltens und der entstehenden Temperaturzwängungen entsprechend erweitert worden. In Bild 4.1 ist die sich ergebende Approximation der Last-Verformungs-Kurve bei einer Berechnung nach der inkrementellen Tangentensteifigkeitsmethode dargestellt.

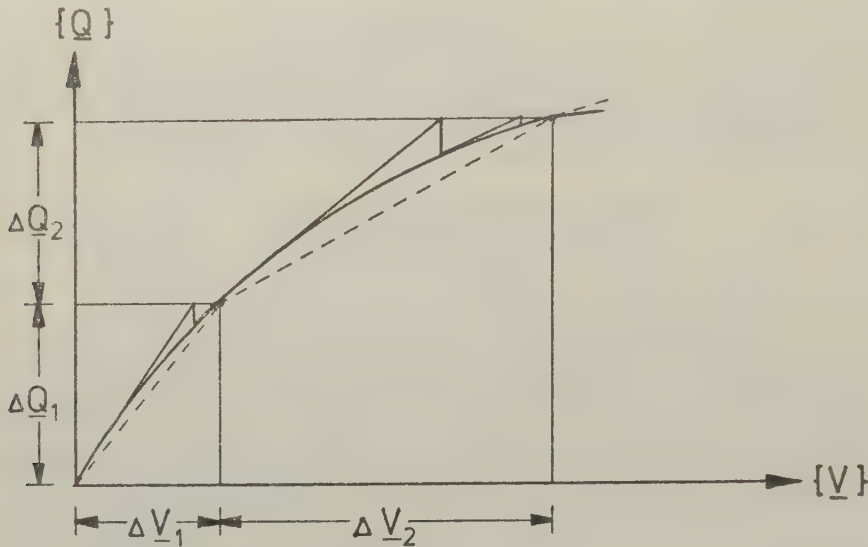


Bild 4.1: Berechnungsgang beim inkrementellen Tangentensteifigkeitsverfahren

Bei der angewandten Methode der inkrementellen Belastungserhöhung wird die gesamte Belastung in kleine Lastinkremente aufgeteilt. Hierbei wird auch die Temperatur für jedes Element als äquivalente Knotenkräfte Schritt für Schritt vorgegeben. Im ersten Schritt wird dann die Steifigkeitsmatrix unter der Annahme des ungerissenen Zustands aufgestellt, der Lastvektor berechnet und die sich ergebenden Knotenverschiebungen bestimmt, aus denen daraufhin für jedes Element des Tragwerks und für jede Schicht Verzerrungen und Spannungen ermittelt werden. Wenn in einem Bereich der Struk-

tur die Zug/Zug- oder Druck/Zug-Festigkeit überschritten ist, muß die Steifigkeit infolge Rißbildung abhängig von der Beanspruchungsart vermindert werden. Dies erfolgt dadurch, daß das neue Spannungs-Dehnungs-Gesetz, welches durch den jeweiligen Spannungszustand und der betreffenden Temperatur festgelegt wird, für den nächsten Schritt geändert und damit die neue Steifigkeitsbeziehung berechnet wird. Der Ermittlung der Werkstoffkenngrößen werden die in den Schwerpunkten der Schichten wirkenden Spannungen zugrundegelegt. Da die Spannungen in einer gerissenen Betonschicht dadurch gekennzeichnet sind, daß normal zum Riß keine Zugkräfte übertragen werden können, müssen die zuvor am Ort des Risses vorhandenen, jetzt aber nicht mehr übertragbaren Spannungen in die Bewehrung und den ungerissenen Beton umgelagert werden. Deshalb muß dem ungerissenen Spannungszustand ein Spannungszustand derart überlagert werden, daß in Richtung der Hauptzugspannungen die Spannungen gerade den zulässigen Werten entsprechen. Man erreicht dies, indem die Differenz zwischen den berechneten und den zulässigen Spannungen gebildet wird und aus diesen unausgeglichene Spannungen über dem gesamten Element Knotenkräfte gebildet werden, die sich aus der durch die Rißbildung freiwerdenden Energie mittels Integration über der Elementdicke und der -fläche ergeben. Der äquivalente Knotenkraftvektor entspricht dem Vektor aus Anfangsspannungen bzw. Anfangsverzerrungen, wie er bereits in dem vorigen Kapitel hergeleitet wurde.

$$\{\Delta \underline{\sigma}\} = \{\underline{\sigma}'\} - \{\underline{\sigma}_{zul}\} \quad (4.2.3)$$

$$\{\underline{q}\} = \begin{bmatrix} \int_A [\underline{H}_M]^T \{\Delta \underline{\sigma}_M\} dA \\ \int_A [\underline{H}_B]^T \{\Delta \underline{\sigma}_B\} dA \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

Hierin bedeuten $\Delta \underline{\sigma}_M$ und $\Delta \underline{\sigma}_B$ die bereits über die Dicke integrierten Spannungen. Da das Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften jetzt nicht mehr erfüllt ist, muß vor Aufbringen weiterer Belastungssinkremente das System unter den Korrekturkräften berechnet werden, aus denen zusätzliche Verformungen resultieren. Die Iteration während eines Lastinkreementes werden als konvergierend angesehen, wenn die globalen Knotenverformungen infolge der sogenannten Ungleichgewichtslasten klein gegenüber den Verformungen infolge des Lastinkreementes sind. Der Lösungsprozeß für ein Belastungssinkrement ergibt sich somit jeweils als eine Folge von Approximationen des wirklichen Spannungs-Verformungs-Verhaltens des Systems, bis das Gleichgewicht und die konstitutiven Gesetze innerhalb einer bestimmten vorgebbaren Schranke erfüllt sind. Bei weiterer Steigerung der Belastung muß der vorher entstandene Riß und die Angabe der Rißrichtung gespeichert sein, da das nichtlineare Verhalten zu veränderlichen Spannungs-Dehnungs-Gesetzen führt. Darüberhinaus können sich zweifach gerissene Betonschichten bei Temperatur frei verformen, so daß in diesen keine Zwängungsspannungen entstehen, während bei einfach gerissenem Beton angenommen wird, daß durch die Verringerung der Steifigkeit auch hier die Zwangsbeanspruchung reduziert werden kann. Die dargestellte Methode ist damit in der Lage, eine Abminderung der Schnittgrößen des Tragwerks bei Zwangsbeanspruchung aus Temperatur zu berücksichtigen.

4.3 Rechenprogramm

Das Ziel dieser Untersuchung, ein Finite-Element-Programm zu entwickeln, in dem die Nichtlinearität der Materialeigenschaften enthalten ist und mit dem die Spannungsumlagerung infolge von Temperaturzwängungen berücksichtigt wird, kann unter Verwendung einer iterativen Methode erreicht werden, wie sie in dem vorherigen Abschnitt erläutert wurde.

Der Programmablauf wird nicht in allen Einzelheiten beschrieben, vielmehr kann nur auf die wesentlichen Schritte verwiesen werden, die den Unterschied gegenüber der Elastizitätstheorie ausmachen.

Im einzelnen müssen folgende Schritte ausgeführt werden:

1. Berechnung der inkrementellen Knotenverschiebungen für das erste Lastinkrement unter Verwendung der ursprünglichen ungerissenen linear-elastischen Steifigkeit
2. Ermittlung der Verzerrungen und Verkrümmungen im Schwerpunkt der Elementbezugsfläche aus den Elementverformungen
3. Bestimmung der Verzerrung jeder einzelnen Schicht des Elementes und der Spannungen unter Verwendung der Materialeigenschaften, die zum Aufbau der Steifigkeitsmatrix benutzt wurden
4. Rißabfrage für die Betonschichten, evtl. Berechnung der nicht aufnehmbaren Spannungen und Änderung der Materialeigenschaften
5. Aufbau der Steifigkeitsmatrix mit den neuen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen und Ein-

bau in die Gesamtsteifigkeit

6. Ist die Konvergenz noch nicht erfüllt, Umformung der überzähligen Spannungen in Ungleichgewichtslasten durch Integration über das Element, sonst Berechnung eines neuen Lastvektors und Zusammenbau zum globalen Lastvektor des betrachteten Lastinkrementes
7. Lösung des Gleichungssystems zur Bestimmung der inkrementellen Knotenverformungen
8. Konvergenzabfrage der globalen Verformungen. Konvergiert die Lösung oder ist die maximale Anzahl der Iterationen erreicht, so wird die Iteration beendet
9. Ist die gesamte Zahl der Lastinkremente noch nicht durchlaufen, Wiederholung der Schritte von Punkt 2 an, sonst Beendigung der Berechnung

In Bild 4.2 ist ein stark vereinfachtes Flußdiagramm für die praktische Anwendung der Methode in dem Rechenprogramm dargestellt. Als Programmiersprache wurde FORTRAN IV verwendet.

Wesentliche Teile des Programms sind der Organisation des Speicherplatzes und dem Lösen des Gleichungssystems vorbehalten. Dazu wird das Systemprogramm FEMAS /48/ benutzt, welches erlaubt, Finite-Element-Analysen bezüglich ihrer numerischen Operationen speicherplatzsparend durchzuführen. Das Vorgehen, welches in den Prozeduren der FEMAS-Software im einzelnen angewendet wird, entspricht der Finiten-Element-Methode für das Weggrößenverfahren schlechthin. Deshalb werden diese Programmenteile nicht weiter erläutert, sondern es wird auf die Benutzerhandbücher von BEEM/BRINK/LECHTLEITNER /48/ verwiesen.

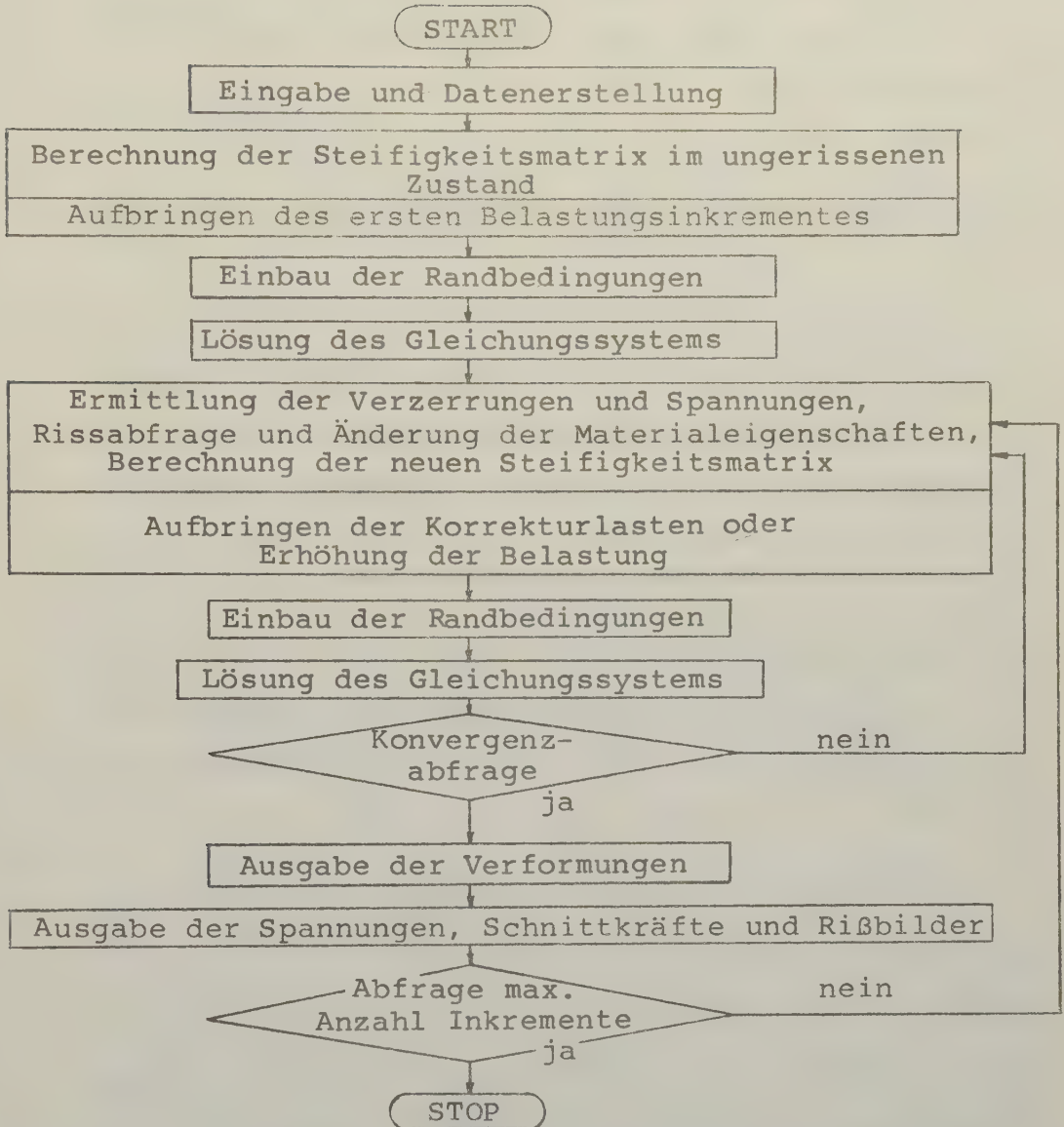


Bild 4.2: Flußdiagramm der inkrementellen Tangentensteifigkeitsmethode

Zur Vereinfachung der Dateneingabe steht ein vom Lehrstuhl III des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau bereitgestelltes, spezielles Datengenerierprogramm zur Verfügung, dessen Funktion darin besteht, Daten aus einfachen Eingabewerten des Problems zu erzeugen. Darüberhinaus sind die An-

schlußbedingungen und die Datenstruktur für dieses Programm und die FEMAS-Prozeduren standardisiert, so daß der Benutzer auf eine umfangreiche Programmbibliothek zurückgreifen kann. Die Rahmenprogramme sind auf der Rechenanlage PRIME 400 der Abt. Bauingenieurwesen der Ruhr-Universität Bochum installiert.

Bei der Programmgestaltung auf Elementebene und der Konzeption einer nichtlinearen Version wurde das Hauptaugenmerk darauf gerichtet, ein Programmsystem zu schaffen, das leicht speziellen Problemen angepaßt werden kann. Deshalb wurde die Unterprogrammtechnik angewandt, bei der das Programm auf eine Reihe von über- und untergeordneten Prozeduren aufbaut, deren Aufgaben sich aus dem jeweiligen Zusammenhang ergeben. Die einzelnen vom Autor geschriebenen Unterprogramme wurden zunächst ausgetestet, bevor sie mit den anderen Prozeduren gekoppelt wurden.

Das Programm ist als anwenderfreundliches System konzipiert und versucht, mit vertretbarem mathematischen und technischen Aufwand das Temperaturverhalten von Stahlbetonschalen möglichst zutreffend zu beschreiben. Daneben soll das Programm erlauben, in vereinfachter Form auch für die Praxis einsetzbar zu sein, um beispielsweise als Bemessungshilfe für sicherheitstheoretisch interessante Fälle zu dienen.

5. Beispiele

5.1 Allgemeines

Nachdem in den vorherigen Kapiteln die theoretischen Grundlagen für eine Beschreibung des Temperaturverhaltens von Stahlbetontragwerken dargestellt bzw. neu entwickelt wurden, sollen nun die baupraktischen Aspekte in den Vordergrund treten.

Um die Richtigkeit und Effektivität des aufgestellten Rechenprogramms zu demonstrieren und die Genauigkeit und das Konvergenzverhalten zu überprüfen, werden zuerst einige Testrechnungen an Stahlbetonbalken, -platten und -schalen durchgeführt, deren Ergebnisse den Angaben in den Arbeiten anderer Autoren gegenübergestellt werden können bzw. deren analytische Lösungen bekannt sind. Dabei soll auch versucht werden, anhand einiger Beispiele Angaben über das Spannungs- und Verformungsverhalten von einfachen Systemen bei nichtlinearen Temperaturgradienten und unter Berücksichtigung der Rißbildung zu gewinnen, wobei zunächst auf das temperaturabhängige Materialverhalten verzichtet wird. Vielmehr kommt es dem Autor darauf an, Unterscheidungsmerkmale zu den derzeitigen Methoden, d.h. linear elastische Rechnung, homogenes Material und lineare Temperaturverteilung über dem Querschnitt, zu finden.

Nach Klärung der vorstehend erläuterten Zielsetzung, das Tragverhalten von Stahlbeton unter Temperatureinflüssen für die numerische Rechnung aufzubereiten, soll durch Berechnungen einiger exemplarischer Schalentragwerke ein Eindruck für die

Brauchbarkeit des Rechenverfahrens bei beliebigen Systemen gewonnen werden. Auch soll mit diesem Teil gezeigt werden, daß die Beschreibung des Werkstoffverhaltens zusammen mit dem Finite-Element-Modell das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonschalentragwerken bei Berücksichtigung von Rißbildung, Spannungsumlagerung und temperaturabhängigen Stoffwerten wirklichkeitsnah erfassen.

Um besondere Einflüsse auf das Temperaturverhalten von Stahlbetonbauteilen zu studieren, werden parametrische Untersuchungen an ausgewählten Beispielen durchgeführt. Daneben sollen die Einflüsse des nichtlinearen Betonverhaltens auf die Zustandsgrößen bei Zwangbeanspruchung anhand dieser Parameterrechnungen aufgezeigt werden und die Auswirkungen der unterschiedlichen thermischen und mechanischen Eigenschaften auf das Spannungsbild herausgestellt werden. Nicht zuletzt soll in diesem Teil durch eine systematische Variation der einzelnen Parameter eine qualitative und quantitative Aussage über das generelle Temperaturverhalten von Stahlbetonbauteile angegeben werden.

5.2 Testrechnungen

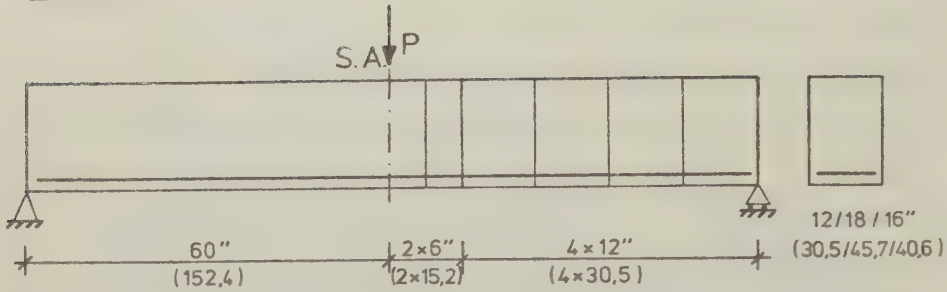
5.2.1 Stahlbetonbalken unter Einzellast

Dieses Beispiel wurde gewählt, um das aufgestellte Rechenprogramm mit einem einfachen Problem, das bereits in der Literatur behandelt wurde, auszutesten und um Rechenerfahrungen hinsichtlich einer effektiven Programmgestaltung zu gewinnen.

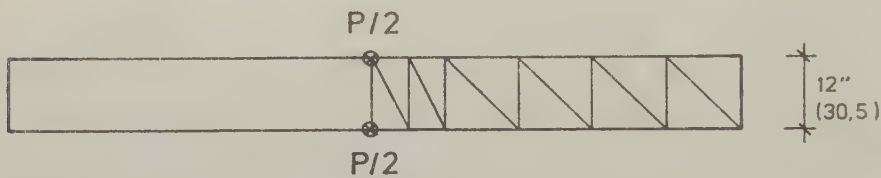
Der untersuchte Balken, die gewählte Element- und Schichteinteilung sowie die zugrundeliegenden Materialeigenschaften sind in Bild 5.1 wiedergegeben. Das Tragwerk wird in 12 Elemente unterteilt, wobei jedes Element 10 Betonschichten und 1 Stahlschicht aufweist. Die Größe der Lastinkremente beträgt 10 kips. Bei der Konvergenzabfrage wird eine Schranke von 3 % zugelassen. Es zeigte sich, daß die Lösung bereits bei maximal 4 Iterationen konvergierte. In Bild 5.2 ist die Last-Verformungskurve, die sich für die Balkenmitte einstellt, wiedergegeben. Das Ergebnis stimmt mit der von LIN /15/ angegebenen Kurve gut überein. Bis zu 10 kips verhält sich der Beton linear elastisch, erst danach treten die ersten Risse auf. Die Rißentwicklung, die mit der Steigerung der Belastung entsteht, ist in Bild 5.3 dargestellt. Die berechneten Rißrichtungen verlaufen alle nahezu rechtwinklig zur Balkenachse. Im Gegensatz zu den Verformungen zeigen die Schnittgrößen keine andere Verteilung als bei der Berechnung nach der Elastizitätstheorie.

Die numerische Untersuchung dieses Beispiels hat gezeigt, daß es nicht vernünftig ist, alle Knotenfreiheitsgrade bezüglich Konvergenz abzufragen, sondern daß es sinnvoll ist, die Abfrage auf den betragsgemäß größten Wert zu beschränken, da andernfalls die Iterationszyklen unnötig verlängert würden. Darüberhinaus wurde festgestellt, daß die richtige Wahl eines geeigneten Lastinkrementes und die Festlegung des Wertes für die im Mittel anzusetzende Betonzugefestigkeit keine leichte Aufgabe ist.

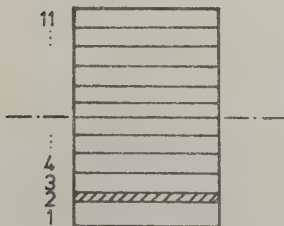
Ansicht



Draufsicht



Querschnitt



Materialeigenschaften

$$E_b = 4150 \text{ ksi } (28635 \text{ MN/m}^2)$$

$$\nu = 0,15$$

$$\beta_z = 0,25 \text{ ksi } (1,7 \text{ MN/m}^2)$$

$$E_s = 29000 \text{ ksi } (200000 \text{ MN/m}^2)$$

$$A_s = 2 \text{ in}^2 \text{ (12,9 cm}^2\text{)}$$

Bild 5.1: Testbalken nach LIN

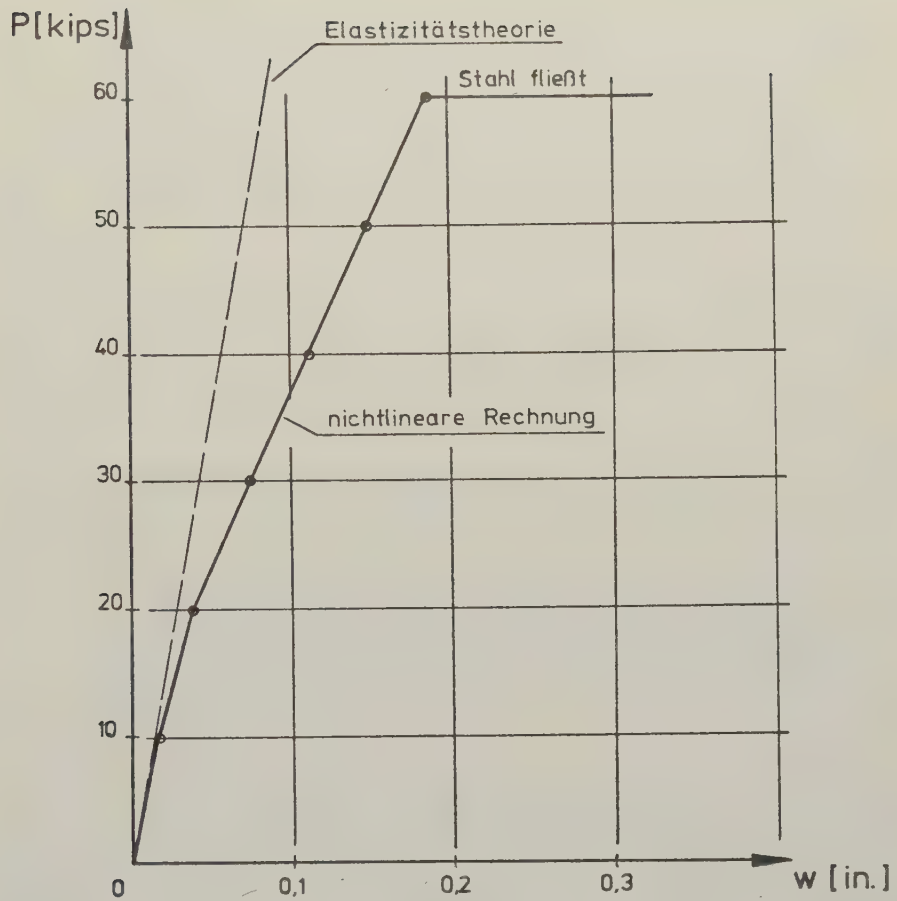
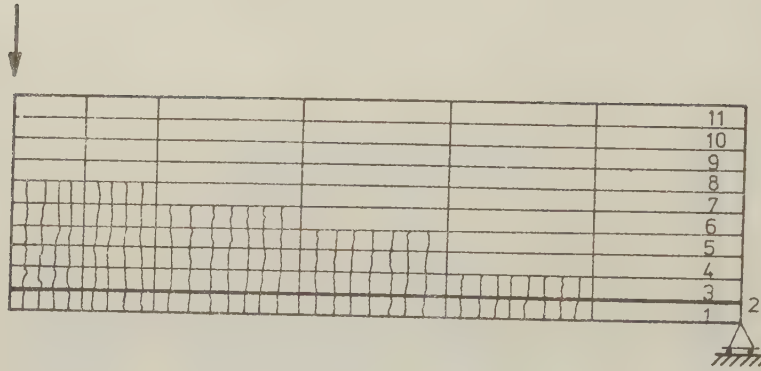
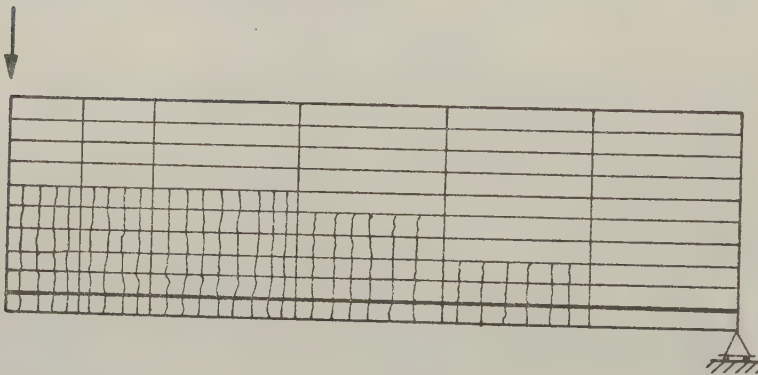


Bild 5.2: Last-Verformungs-Kurve in Balkenmitte

3. Lastinkrement



4. Lastinkrement



5. Lastinkrement

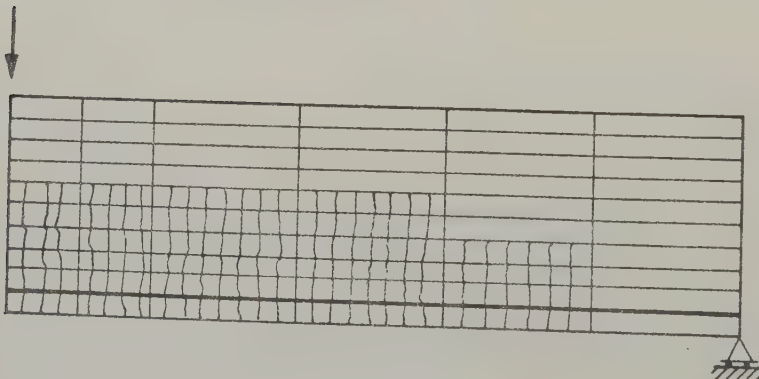


Bild 5.3: Rißentwicklung

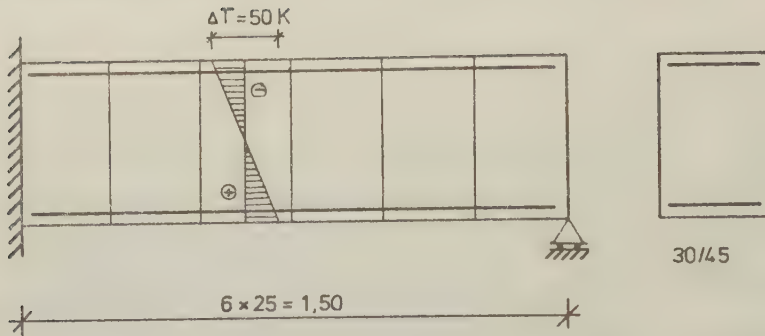
5.2.2 Stahlbetonbalken unter linearer Temperaturverteilung

Eine Möglichkeit zur Überprüfung des Programms im Falle von Temperaturbeanspruchungen ergibt sich aus der Nachrechnung eines Balkens, dessen Systembeschreibung in Bild 5.4 wiedergegeben ist. Da die analytische Lösung für den linearen Fall bekannt ist, soll an diesem Beispiel der Einfluß der Bewehrung auf die Größe der Schnittkräfte und der Abbau dieser Zwangskräfte durch Rißbildung herausgestellt werden. Da dieses Beispiel ebenfalls nur Kontrolle des Rechenprogramms sein soll, wird die Anzahl der Element auf 12 beschränkt, um Rechenzeit zu sparen. Trotzdem wurden hinreichend genaue Ergebnisse erhalten. Die Temperatur-Verformungskurve für die Durchbiegung in Balkenmitte ist in Bild 5.5 angegeben. Dem Diagramm ist zu entnehmen, daß die Nichtlinearität im Falle von Zwangsbeanspruchungen merklich größer ist als bei Beanspruchung infolge äußerer Lasten. Auch ein Vergleich der Durchbiegungen mit den theoretischen Lösungen nach der Elastizitätstheorie macht dies klar. Man erkennt, daß sich das Tragwerk der Beanspruchung aus Temperaturzwängungen durch wachsende Verformungen entzieht.

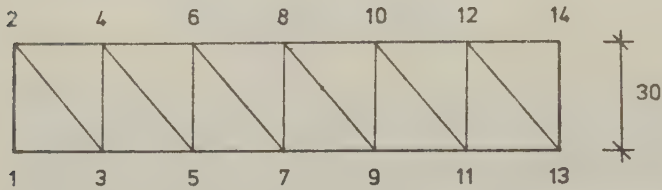
Für das erste und letzte Temperaturinkrement sind die Biegemomentenverläufe in Bild 5.6 dargestellt. Die Ergebnisse der Rechnung nach der Elastizitätstheorie sind strichliert eingetragen. Man erkennt deutlich den Abbau der Zwangsschnittgrößen infolge der Rißentwicklung

Der Rißfortschritt bei einem Temperaturunterschied zwischen Ober- und Unterseite von 50 K ist in Bild 5.7 dargestellt.

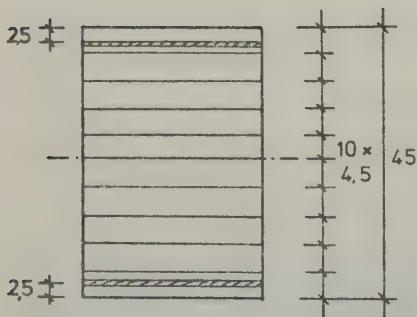
Ansicht



Draufsicht



Querschnitt



Materialeigenschaften

$$E_b = 3000 \text{ kN/cm}^2 \text{ (B 25)}$$

$$\beta_p = -3,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\beta_z = 0,25 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0,15$$

$$E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\beta_s = 42 \text{ kN/cm}^2 \text{ (BSt 420/500)}$$

$$\mu_{\text{ges}} = 0,5 \%$$

$$\alpha_T = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Bild 5.4: Testbalken unter linearer Temperaturverteilung

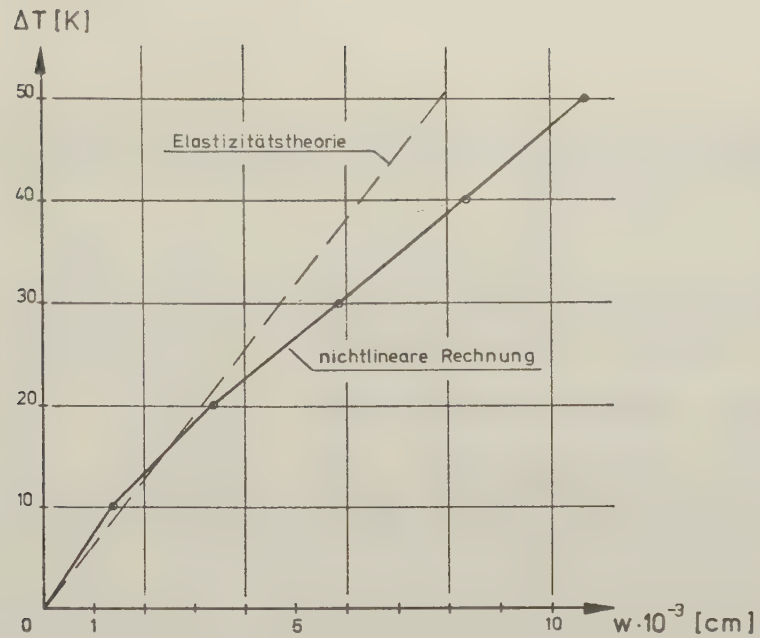


Bild 5.5: Temperatur-Durchbiegungs-Kurve in Balkenmitte

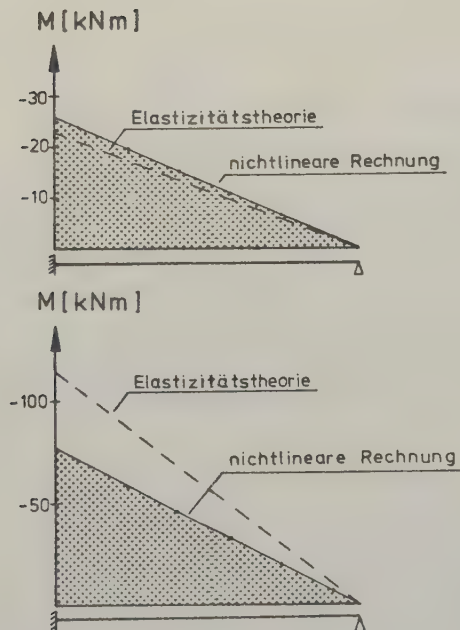


Bild 5.6: Verlauf der Biegemomente für $\Delta T = 10 \text{ K}$ (oben) und $\Delta T = 50 \text{ K}$ (unten)

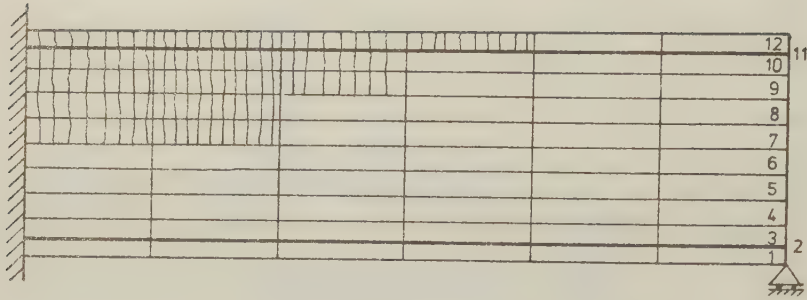


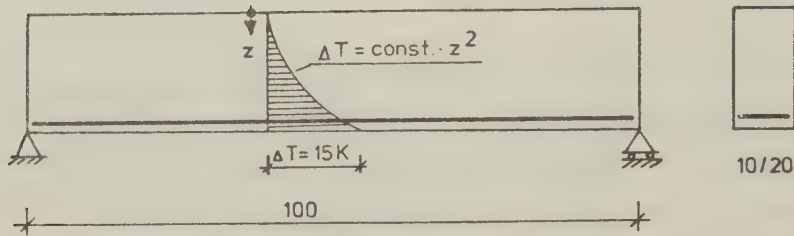
Bild 5.7: Rißentwicklung bei einem Gradienten von $\Delta T = 50 \text{ K}$

5.2.3 Stahlbetonbalken unter nichtlinearer Temperaturverteilung

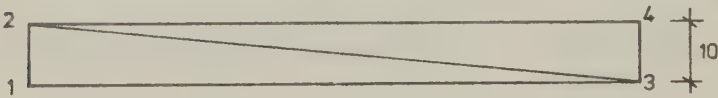
Um zu überprüfen, ob das erstellte Programm auch die Auswirkungen einer nichtlinearen Temperaturverteilung richtig beschreibt, wurde ein Einfeldbalken unter einer parabelförmigen Temperaturverteilung untersucht. Das statische System ist in Bild 5.8 dargestellt, die Elemententeilung und die Querschnitts- und Materialkennwerte sind dort ebenfalls aufgeführt. Da der Balken über die gesamte Länge eine konstante Krümmung aufweist, werden nur 2 Elemente zur Diskretisierung benötigt.

Die Verformungen dieses Balkens müssen denen eines Balkens, der einem linearen Gradienten von $\Delta T = 15 \text{ K}$ ausgesetzt ist, entsprechen, da sich die untere Faser gegenüber der oberen um $\alpha_T \cdot \Delta T$ dehnt und die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte gültig ist. Die nichtlineare Temperaturverteilung ruft einen Eigenspannungszustand hervor, der aufgrund der statischen Bestimmtheit der Lagerung durch das Fehlen von Schnittkräften und Auflagerreaktionen charakterisiert ist. Dieser Zusammenhang ist in Bild 5.9 noch einmal veranschaulicht. Die Spannungsverteilung ist in Bild 5.10 aufgetragen.

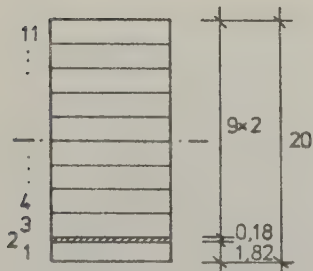
Ansicht



Draufsicht



Querschnitt



Materialeigenschaften

$$E_b = 3000 \text{ kN/cm}^2 \text{ (B 25)}$$

$$\beta_p = -3,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\beta_z = 0,25 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0$$

$$E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\beta_s = 42 \text{ kN/cm}^2 \text{ (BSt 420/500)}$$

$$\mu = 1,8 \text{ cm}^2$$

$$\alpha_T = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Bild 5.8: Testbalken unter parabelförmiger Temperaturverteilung

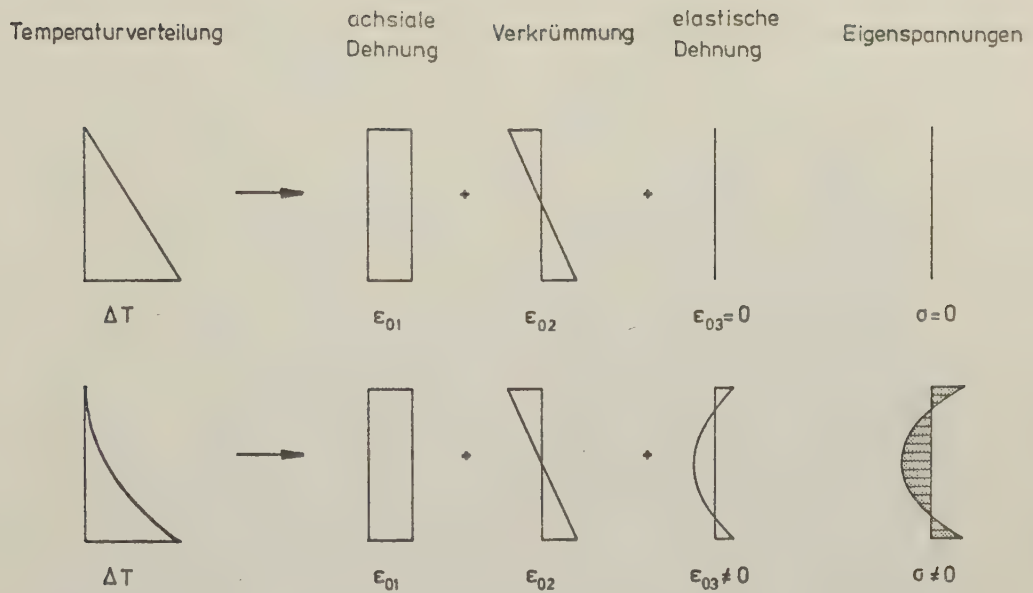


Bild 5.9: Spannungs-Verformungs-Verhalten bei nichtlinearer Temperaturverteilung

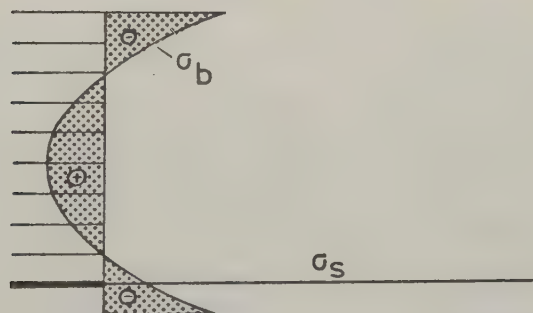


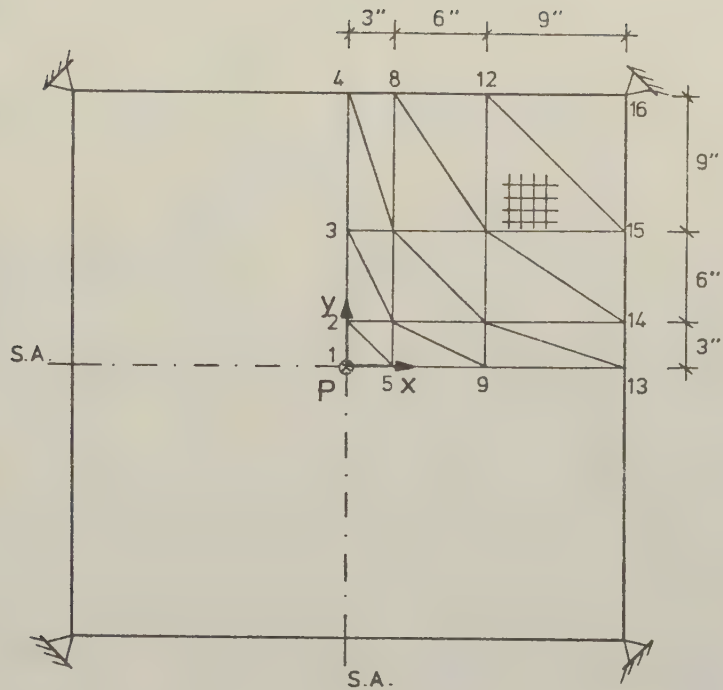
Bild 5.10: Spannungen im Balkenquerschnitt

5.2.4 Stahlbetonplatte unter Einzellast

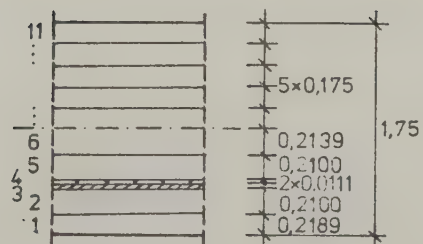
Dieses Beispiel wurde gewählt, um das Rechenprogramm auch für den zweidimensionalen Fall zu überprüfen. Diese Platte wurde von McNEICE experimentell und auch schon von LIN /15/ und HAND /11/ numerisch untersucht, ein ähnliches Tragwerk berechnet auch MÜLLER /49/. Die Systembeschreibung der Struktur sowie die benötigten Materialkennwerte sind in Bild 5.11 angegeben. Zur rechnerischen Untersuchung genügt ein Plattenviertel, das in 18 Elemente unterteilt wird, die jeweils aus 9 Betonschichten und 2 Stahlschichten aufgebaut sind. Als Lastinkrement für die Einzellast in Plattenmitte wurde eine Größe von 1 kip gewählt. Bild 5.12 zeigt die Last-Durchbiegungs-Kurve für den Punkt 2 der Platte und verdeutlicht das nichtproportionale Verhalten. Ein Vergleich mit den Angaben von LIN (s. Bild 5.13) zeigt, daß die erhaltenen Ergebnisse als gut beurteilt werden können.

Um die Genauigkeit der Rißbehandlung herauszustellen, ist die Risseentwicklung bei dem dritten Lastschritt an der Plattenunterseite in Bild 5.14 wiedergegeben. Man erkennt, daß das Rißbild qualitativ mit den Verläufen in dem von MÜLLER berechneten Beispiel mit ähnlichem statischen System übereinstimmt (s. Bild 5.15).

Draufsicht



Querschnitt



Materialeigenschaften

$$E_b = 4150 \text{ ksi}$$

$$\nu = 0,15$$

$$\beta_p = -5,5 \text{ ksi}$$

$$\beta_z = 0,20 \text{ ksi}$$

$$E_s = 29000 \text{ ksi}$$

$$\mu_x = 0,85\% = \mu_y$$

$$\beta_s = 60 \text{ ksi}$$

Bild 5.11: Testplatte von McNEICE nach LIN

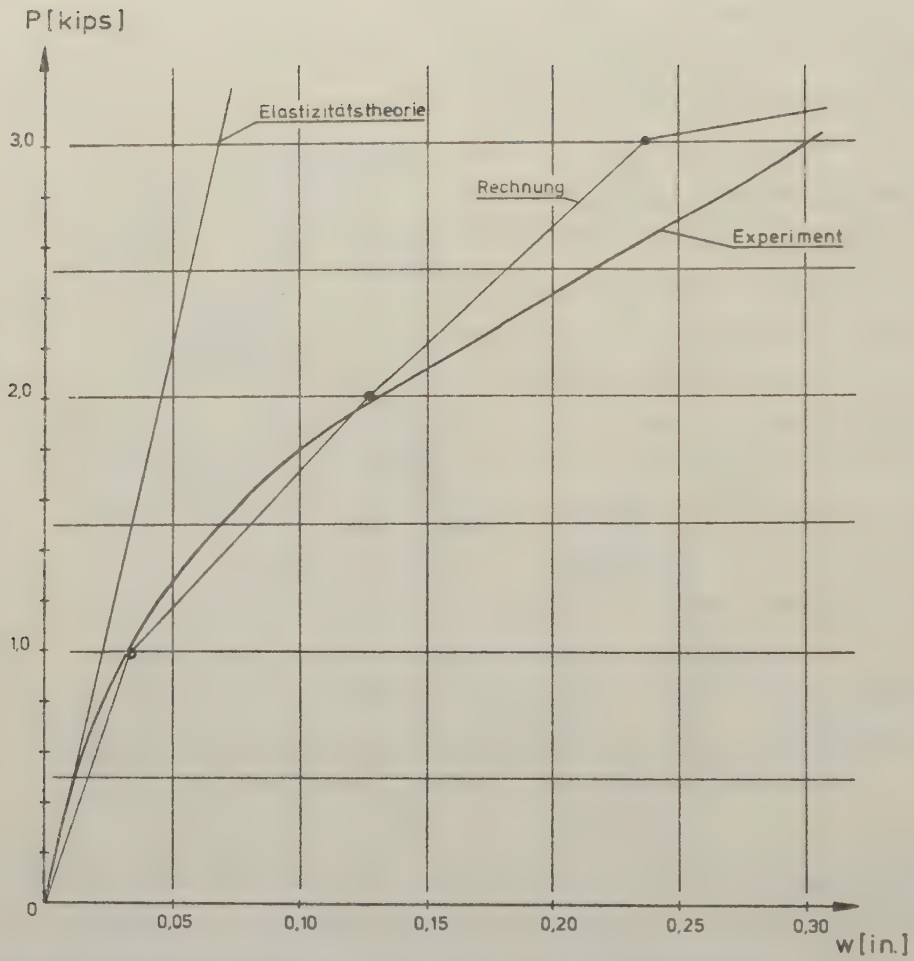


Bild 5.12: Last-Durchbiegungs-Kurve für Punkt 2

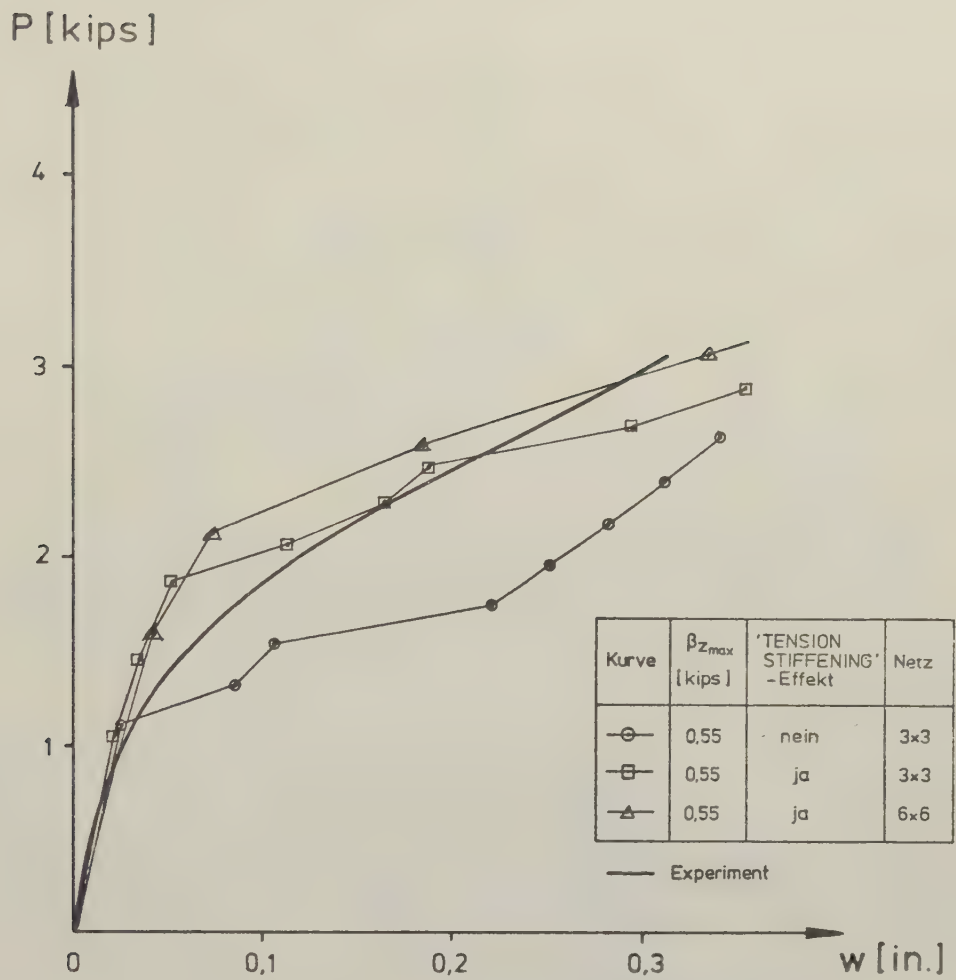


Bild 5.13: Last-Verformungs-Kurve nach LIN

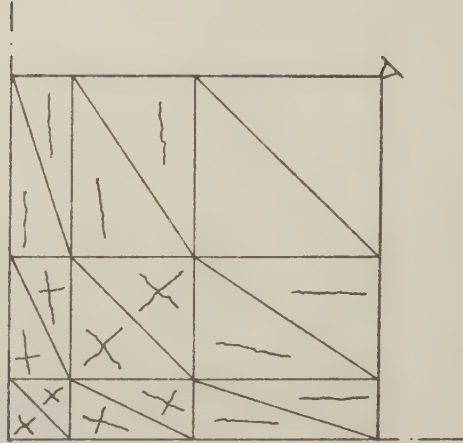


Bild 5.14: Rißbild an der Plattenunterseite für die 3. Laststufe ($P = 3,0$ kips)

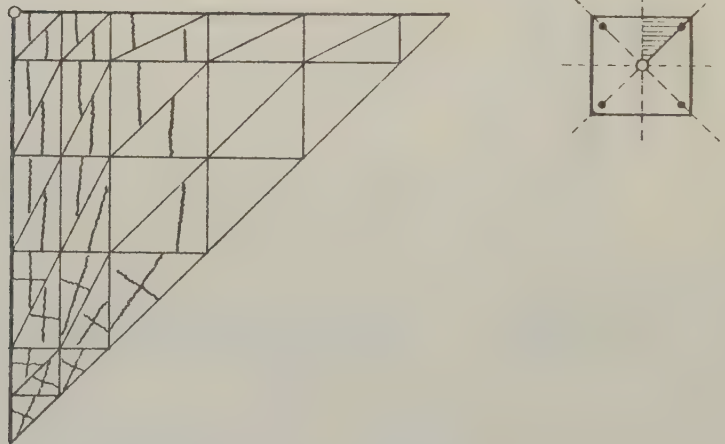


Bild 5.15: Rißbild der von MÜLLER untersuchten Platte an der Unterseite für eine mittlere Laststufe

Die Bedeutung der vorstehenden Rechenergebnisse ist darin zu sehen, daß auch mit einer einfachen Diskretisierung einige, unter Umständen bereits ausreichende, Aussagen über das Tragverhalten und die Risseentwicklung von Stahlbetontragwerken gemacht werden können. Darüberhinaus scheint die Brauchbarkeit des vorgestellten Programms anhand der angeführten Beispiele nachgewiesen zu sein, so daß im folgenden Abschnitt dazu übergegangen werden kann, unter Berücksichtigung der temperaturabhängigen Werkstoffparameter einige Stahlbetontragwerke, wie sie in der Praxis häufig vorkommen, unter Temperaturbeanspruchung zu untersuchen.

5.3 Berechnung temperaturbeanspruchter Schalentragerwerke

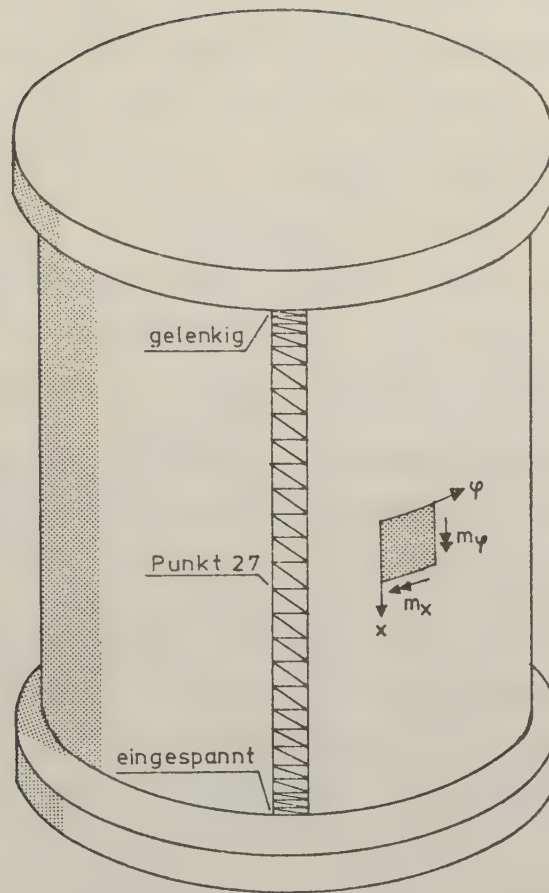
Bestimmte Bauwerke im Energieversorgungsbereich, sogenannte Sicherheitsbehälter, können im Katastrophenfall plötzlich auf ihrer Innenseite sehr hohen oder je nach Verwendungszweck auch sehr tiefen Temperaturen ausgesetzt werden, so daß es innerhalb des Bauteilquerschnittes zu großen Temperaturgradienten kommt. Da Erfahrungen über das Verhalten von Stahl- und Spannbetonkonstruktionen bei solchen außergewöhnlichen Spannungszuständen bis heute kaum bekannt geworden sind, weil viele Berechnungsverfahren das Bauteilverhalten unter hoher thermischer Belastung nicht wirklichkeitsnah erfassen können, soll mit dieser Arbeit vor allem das Ziel verfolgt werden, folgende Fragen im Zusammenhang mit dem Temperaturverhalten von mittel-

dicken Stahlbetonschalentragwerken zu klären:

1. Welchen Einfluß hat das nichtlineare Verhalten des Verbundbaustoffs Stahlbeton auf die Zwangsschnittgrößen?
2. Wie wirkt sich die Berücksichtigung des temperaturabhängigen Materialgesetzes auf den Spannungs- und Verformungszustand aus?
3. Welche Änderungen in den Zustandsgrößen ergeben sich bei beliebigen Temperaturgradienten gegenüber linearen Temperaturverteilungen?

Bei den Berechnungen werden die Bereiche sehr hoher und sehr tiefer Temperaturen unterschieden, wobei die Untersuchungen im Bereich von Tieftemperaturen in zwei Teilgebiete untergliedert sind, die sowohl die normalen Umweltbedingungen für den Behälter als auch eine Wasserlagerung berücksichtigen. Hierbei werden die Möglichkeiten untersucht, daß die Zwangbeanspruchung infolge Temperatur alleine oder im Zusammenhang mit einer Belastung aus Innendruck auftritt.

Als Beispiel wird ein zylindrischer Behälter gewählt, wie er in Bild 5.16 abgebildet ist. Durchmesser und Höhe betragen 20 m, die Wand ist 50 cm dick, so daß diese Schale mit einem Verhältnis von $d/R = 1/20$ als mitteldick gelten kann. Als Baustoff wird ein Beton der Festigkeitsklasse B35 angenommen, dessen mittlere Druckfestigkeit in der DIN 1045 /32/ mit 40 N/mm^2 und dessen Elastizitätsmodul mit $3,4 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ angegeben werden. Die Bewehrung besteht aus einem beidseitigen Bewehrungsnetz von Ring- und Meridianbewehrung, die je Seite und Richtung einen Bewehrungsgrad von 0,25 % aufweist und aus schlaff verlegtem Spannstahl 1350/1500 besteht.



System

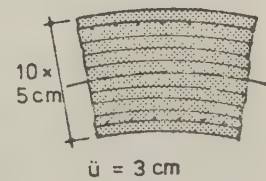
$$R = 10,0 \text{ m}$$

$$d = 0,50 \text{ m}$$

$$d/R = 1/20$$

$$H = 20,0 \text{ m}$$

Querschnitt



Material

Beton B 35:

$$E_b = 34 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta_{ws} = 40 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta_z = 3 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0$$

$$\alpha_{T_0} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Stahl St 1350/1500:

$\mu = 0,25 \%$ je Seite und Richtung

$$E_s = 210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta_s = 1350 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\alpha_{T_0} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Bild 5.16: Behälter aus Stahlbeton

Die Wanddicke wird bei der numerischen Berechnung in 10 Betonschichten unterteilt. Bei den folgenden Berechnungen wird vorausgesetzt, daß die Belastungen infolge Temperatureinwirkung und Innendruck rotationssymmetrisch und höhenkonstant sind. Aus diesem Grunde braucht nur ein Ausschnitt des Zylinders in der Finiten-Element-Analyse diskretisiert zu werden. Gewählt wird ein Segment des Behälters von 30° , das in 54 Elemente unterteilt wird, wobei die Randbereiche feiner diskretisiert werden als der Bereich in der Mitte. Die Randbedingungen werden unten eingespannt und oben gelenkig gelagert angenommen. Um die Güte der Element-einteilung zu überprüfen, wurde zunächst eine Rechnung auf der Grundlage homogenen Material durchgeführt, deren Ergebnisse mit denen aus der analytischen Lösung nach der Biegetheorie verglichen werden können. Es zeigte sich, daß die gewählte Diskretisierung eine gute Beschreibung der Struktur erlaubt.

5.3.1 Behälter unter hohen Temperaturen

Zuerst wird der Fall behandelt, daß der Behälter unter der Einwirkung einer linearen Temperaturverteilung steht. Die Innenseite wird auf 200°C erwärmt, während die Außentemperatur zu 20°C angenommen wird, d.h. $\Delta T = 180\text{ K}$. Bei der nichtlinearen Berechnung wird ein Temperaturinkrement von 10 K gewählt. Die temperaturabhängigen Materialgesetze für Beton und Stahl werden berücksichtigt.

Als Ergebnisse sind für diesen Fall dargestellt:

Bild 5.17: die Biegelinie bei $\Delta T = 180 \text{ K}$

Bild 5.18: die Temperatur-Durchbiegungs-Kurve in der Behältermitte ($x = 9,50 \text{ m}$)

Bild 5.19: die Normalkräfte n_φ bei $\Delta T = 180 \text{ K}$

Bild 5.20: die Normalkraft n_φ am unteren Rand ($x = 0,0 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

Bild 5.21: die Biegemomente m_x bei $\Delta T = 180 \text{ K}$

Bild 5.22: die Biegemomente m_φ bei $\Delta T = 180 \text{ K}$

Bild 5.23: die Biegemomente m_x in Behältermitte in Abhängigkeit der Temperatur

Bild 5.24: wie Bild 5.23, aber als auf den Zustand I bezogene Größen

Bild 5.25: die Rißbilder an der Behälterinnen- und -außenseite bei $\Delta T = 100 \text{ K}$

Bild 5.26: wie Bild 5.25, aber bei $\Delta T = 180 \text{ K}$

Zum Vergleich sind jeweils die Ergebnisse nach der Elastizitätstheorie eingetragen.

Die Biegelinie des Behälters unter Innentemperaturen von $200 \text{ }^\circ\text{C}$ (Bild 5.17) verdeutlicht, daß die Verformungen unter Berücksichtigung des temperaturabhängigen Materialverhaltens und des nichtlinearen Verhaltens von Stahlbeton um bis zu 47 % anwachsen. Eine qualitative Änderung ist jedoch nicht festzustellen. Sieht man sich die Temperatur-Durchbiegungs-Kurve für den mittleren, ungestörten Bereich des Behälters an (Bild 5.18), so erkennt man, daß die Nichtlinearität bei Beginn der Rißbildung bei $\Delta T = 20 \text{ K}$ bis $\Delta T = 50 \text{ K}$ besonders ausgeprägt ist, während die Verformungen danach fast linear anwachsen. Die Normalkräfte n_φ

werden bei Gradienten von $\Delta T = 180 \text{ K}$ um ca. 30 % kleiner (Bild 5.19). Diese Tatsache ist jedoch hauptsächlich auf die Abnahme der Betonfestigkeit zurückzuführen und nicht so sehr auf die Rißbildung, da es sich um Druckkräfte handelt und der Beton in den Randbereichen zwar in Ringrichtung, aber nicht in Meridianrichtung aufreißt. Aus Bild 5.20 geht der fast lineare Verlauf der Normalkraft n_φ an den Rändern deutlich hervor. In den Bildern 5.21 und 5.22 sind die Biegemomente m_x und m_φ bei Temperaturunterschieden von 180 K dargestellt, Bild 5.23 zeigt die Zwangmomente in der Behältermitte in Abhängigkeit der Temperatur. Besonders aussagekräftig ist die Darstellung der bezogenen Momente in Bild 5.24. Hier sind die Biegemomente m_x bezogen auf die Ergebnisse bei homogenem linear elastischem Material für den mittleren Bereich des Behälters aufgetragen. Man erkennt, daß die Abnahme der Gesamtsteifigkeit des Tragwerkes bereits um 12 % kleinere Momente zur Folge hat. Aus dieser Abbildung geht auch die Abnahme der bezogenen Zwangmomente infolge Rißbildung besonders gut hervor. Wachsen die Gradienten über $\Delta T = 100 \text{ K}$ an, so ist die Rißbildung weitgehend abgeschlossen. Die Momente betragen bei Temperaturunterschieden größer 150 K nur noch rund 1/3 der Werte nach der Elastizitätstheorie. Die Rißbilder bei Temperaturstufen von 100 K und 180 K in Bild 5.25 und Bild 5.26 heben hervor, daß die Riß Tiefen sich nicht mehr entscheidend ändern. Während bei $\Delta T = 100 \text{ K}$ der Querschnitt im mittleren Bereich zur Hälfte gerissen ist, schreitet die Rißentwicklung bis zu einer Innentemperatur von 200 °C nur um 1/10 der Querschnittsdicke fort.

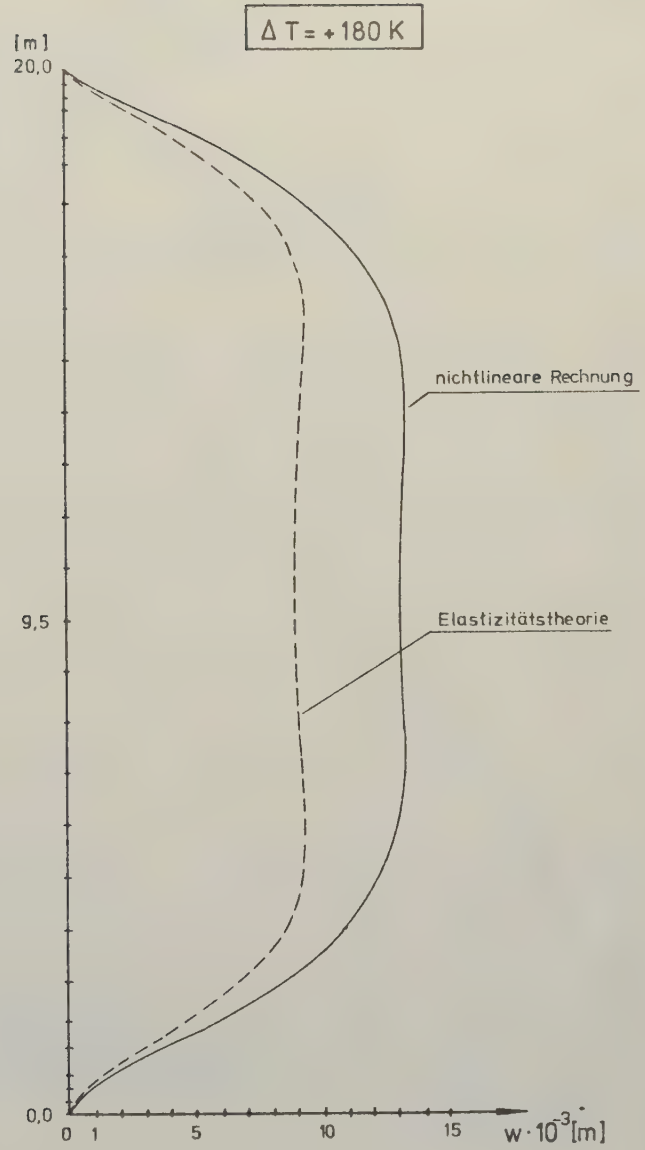


Bild 5.17: Biegelinie bei $\Delta T = 180 \text{ K}$

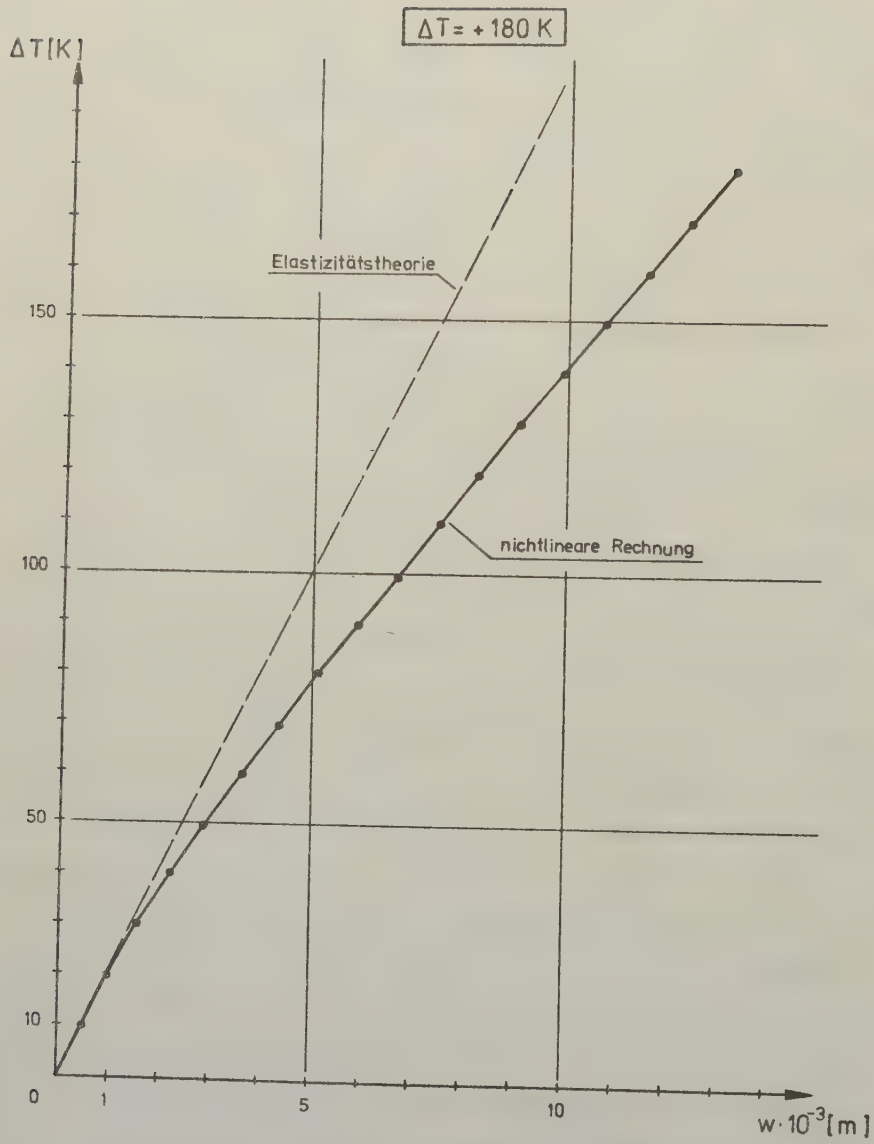


Bild 5.18: Temperatur-Verformungs-Kurve in der Behältermitte (Punkt 27: $x = 9,50$ m)

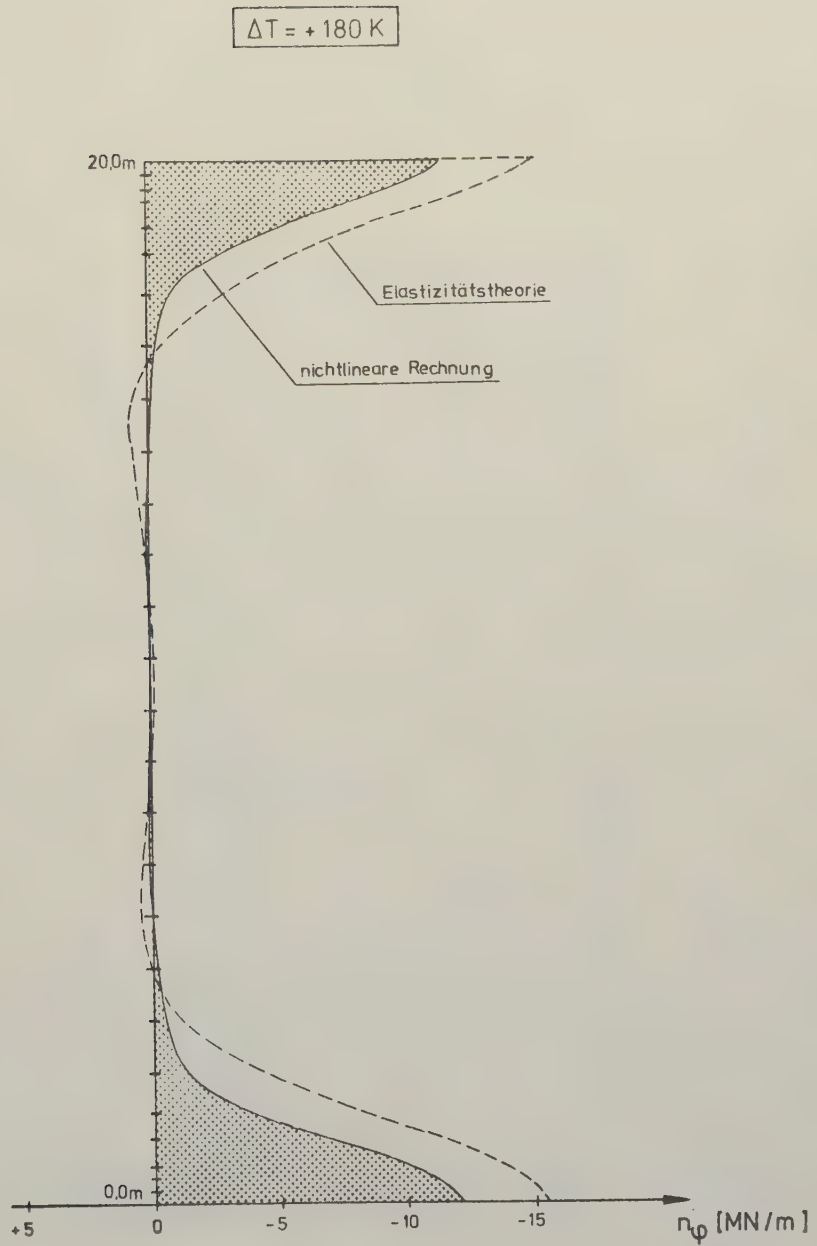


Bild 5.19: Normalkräfte n_φ bei $\Delta T = +180 \text{ K}$

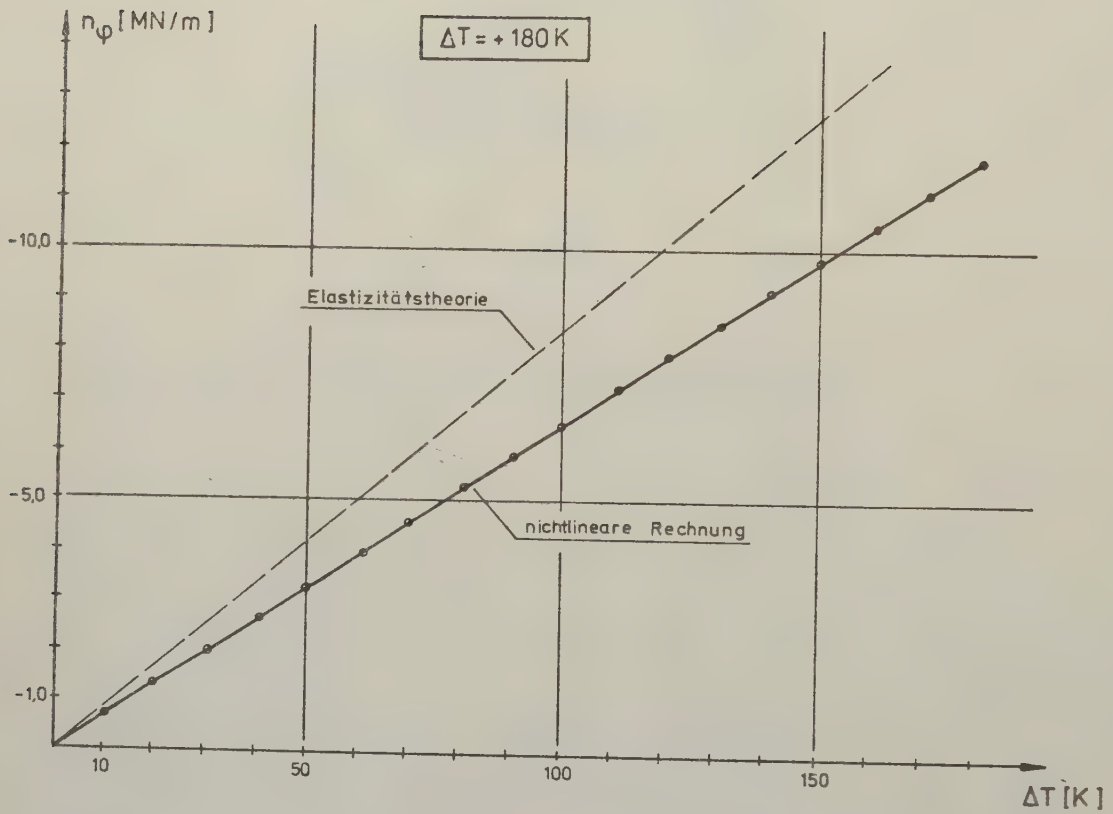


Bild 5.20: Normalkraft n_φ am unteren Rand ($x = 0,0 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

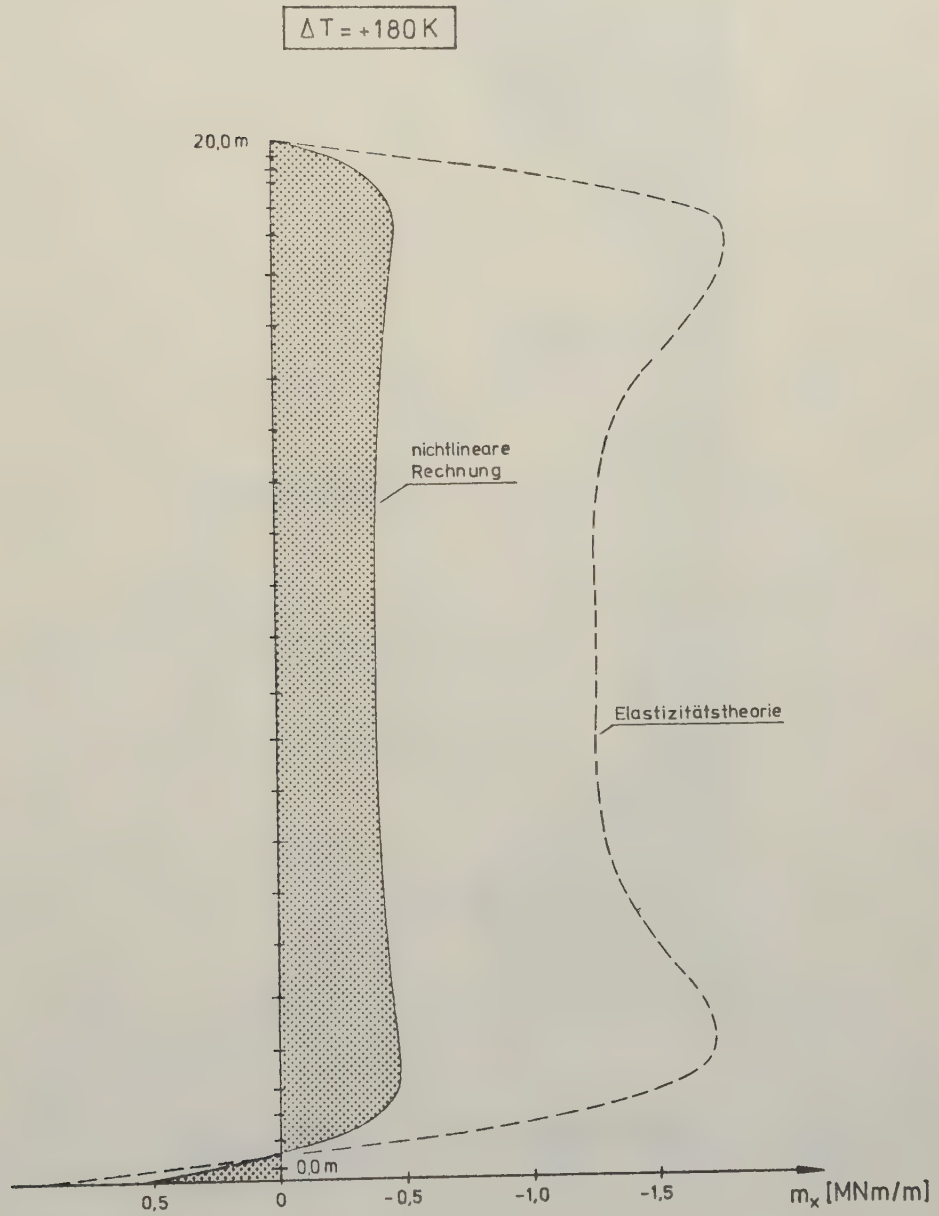


Bild 5.21: Biegemomente m_x bei $\Delta T = +180 \text{ K}$

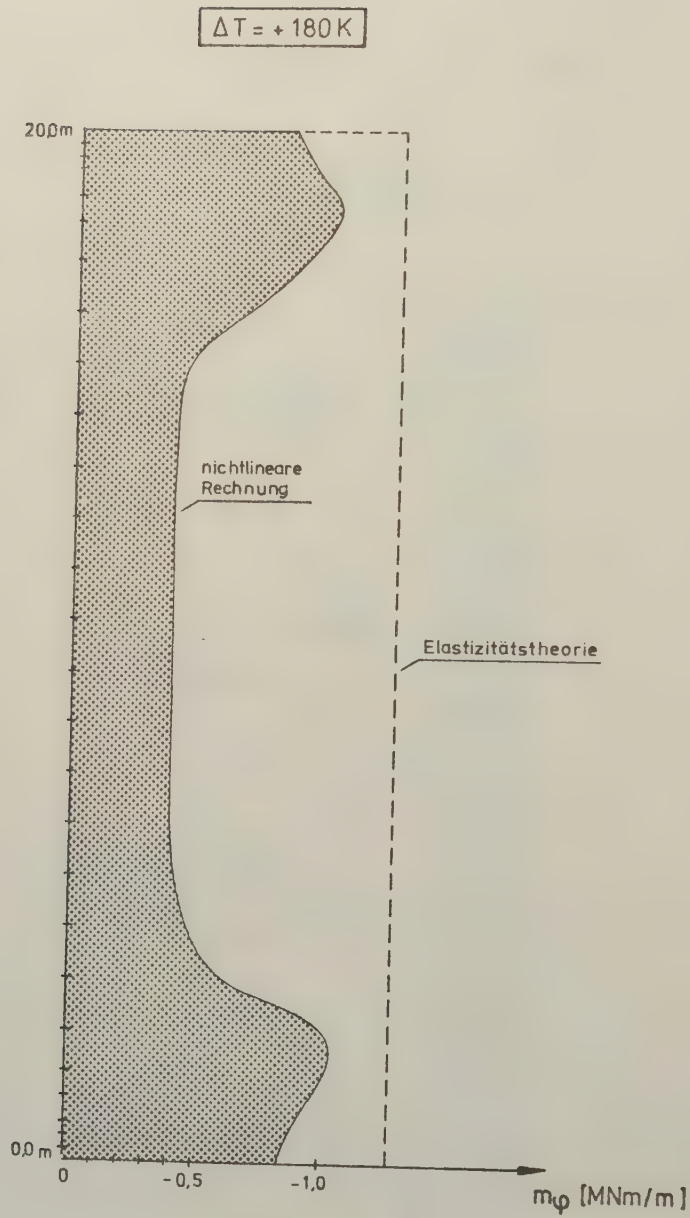


Bild 5.22: Biegemomente m_φ bei $\Delta T = +180 \text{ K}$

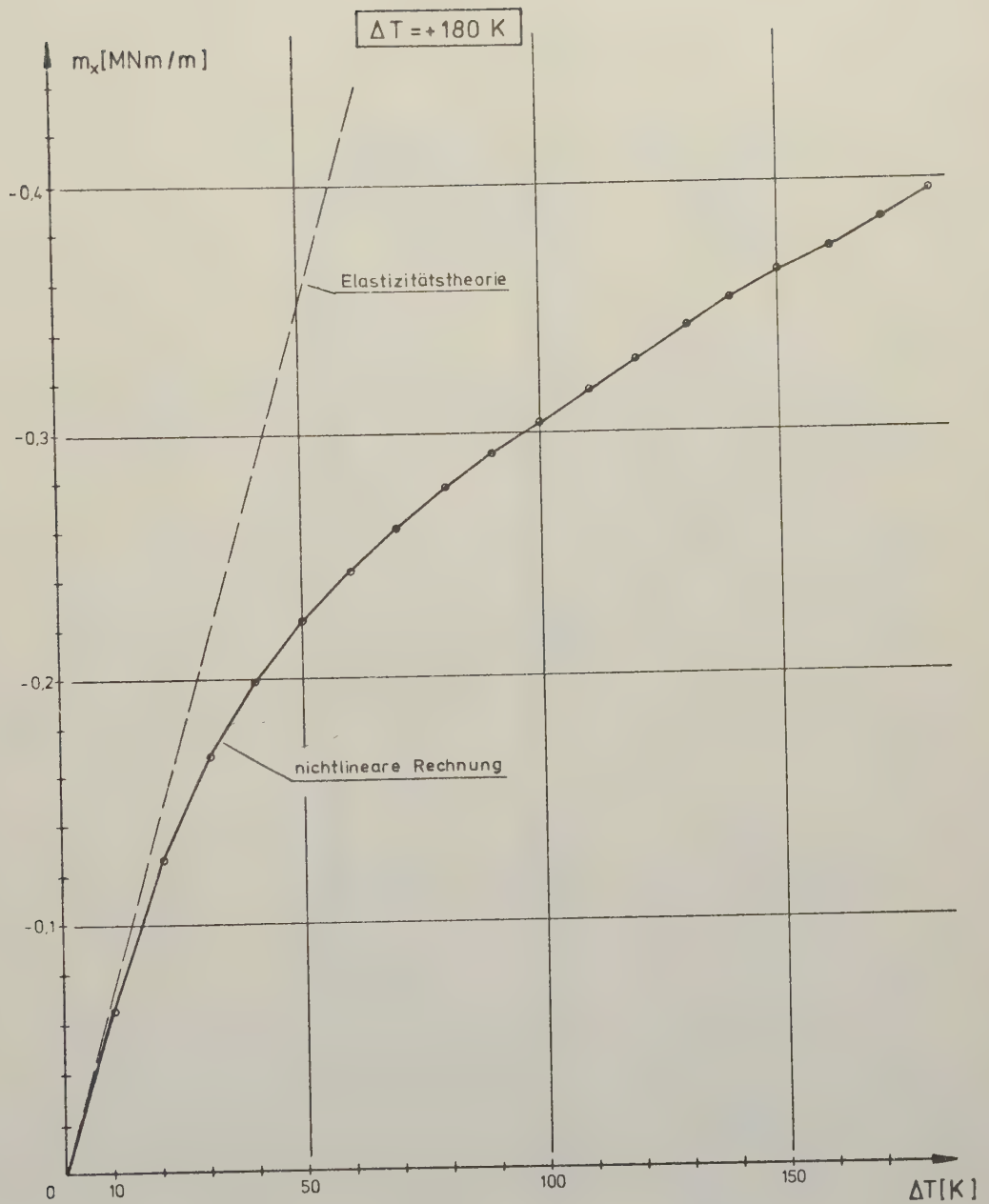


Bild 5.23: Biegemomente m_x in Behältermitte ($x = 10,0 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

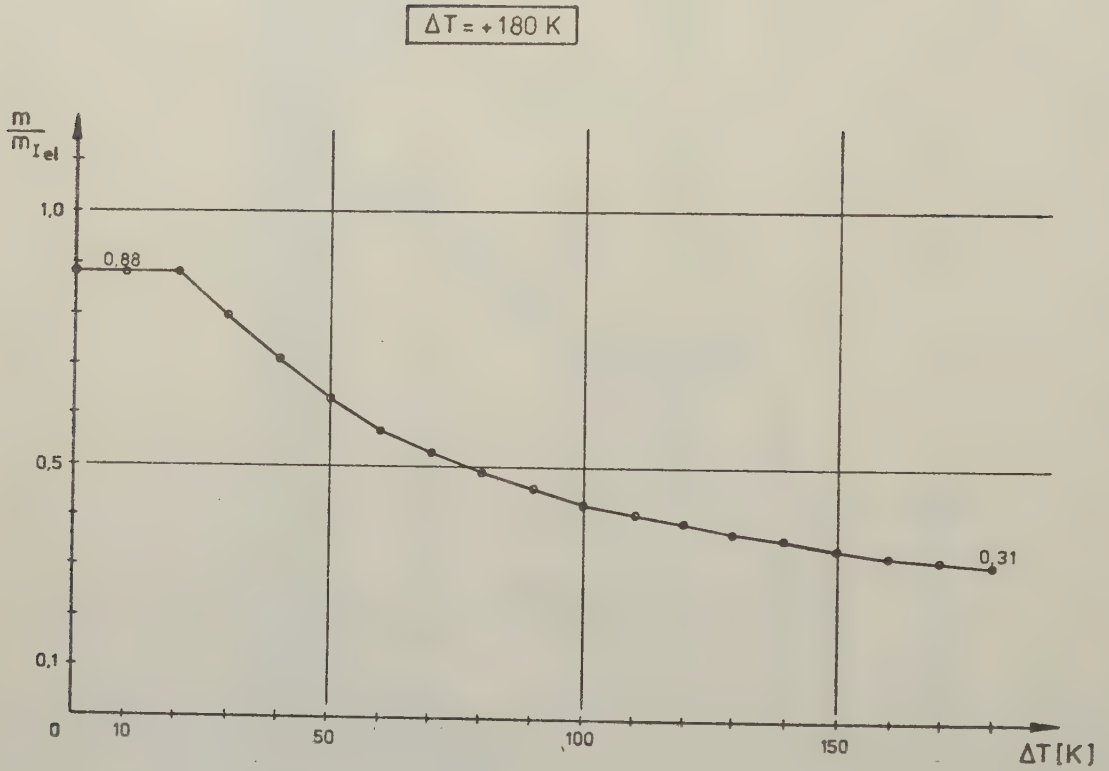


Bild 5.24: Auf den Zustand I bezogene Biegemomente m_x in Behältermitte ($x = 10,0 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

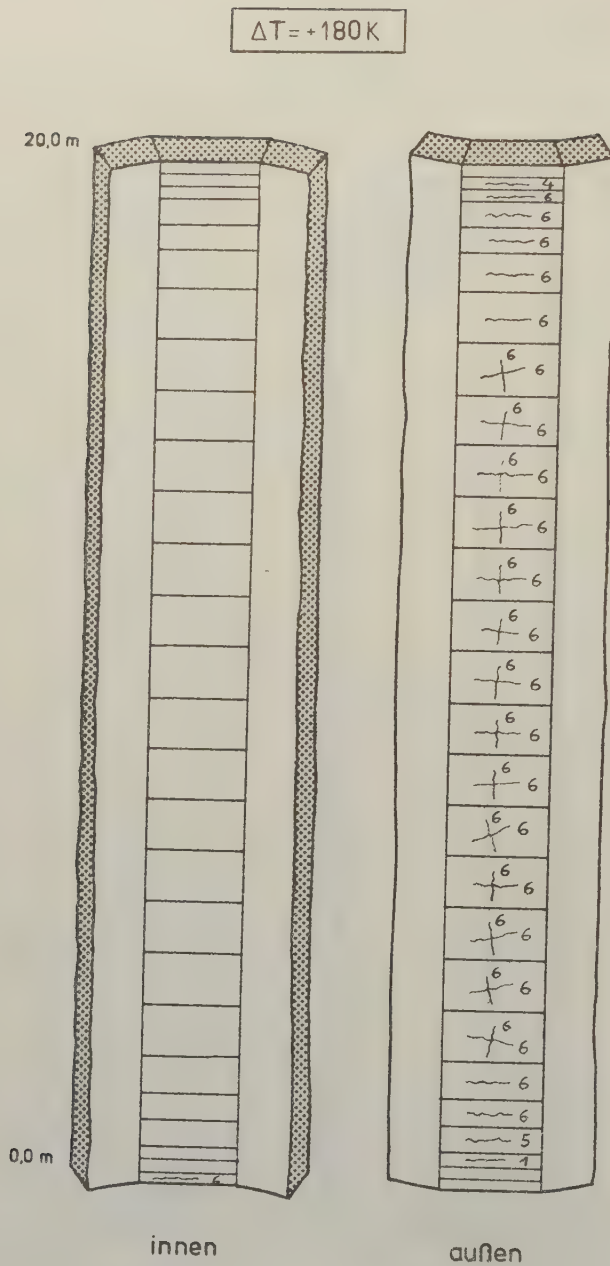


Bild 5.26: Reißbilder an der Behälterinnen- und -außenseite bei $\Delta T = 180 \text{ K}$ (Zahlen $\hat{=}$ Anzahl der gerissenen Schichten)

5.3.2 Behälter unter hohen Temperaturen und Innendruck

Um den Zusammenhang zwischen Zwang- und Lastschnittgrößen aufzuzeigen und um die Anwendbarkeit des vorgestellten Modells zur Bestimmung der Grenztragfähigkeit von temperaturbeanspruchten Stahlbetonschalen, die gleichzeitig durch hohen Innendruck belastet werden, zu demonstrieren, wird in der folgenden Berechnung zusätzlich zu der Erwärmung auf der Innenseite angenommen, daß der Behälter unter einem Innendruck von 360 kN/m^2 (3,6 bar) steht. Die Ergebnisse werden in folgenden Bildern dargestellt:

- Bild 5.27: die Temperatur-/Last-Verschiebungskurve für die Behältermitte ($x = 9,5 \text{ m}$)
- Bild 5.28: die Normalkräfte n_φ bei $\Delta T = 180 \text{ K}$
- Bild 5.29: die Biegemomente m_x bei $\Delta T = 180 \text{ K}$
- Bild 5.30: die Biegemomente m_φ bei $\Delta T = 180 \text{ K}$
- Bild 5.31: die Rißbilder bei der 18. Laststufe ($p = 360 \text{ kN/m}^2$, $\Delta T = 180 \text{ K}$)

Die zeichnerische Darstellung der ermittelten Last-Verformungs-Kurve für den Punkt 27 im mittleren Bereich des Behälters (Bild 5.27) liefert einen Anhaltswert zur Beurteilung des Steifigkeitsabfalls infolge Rißbildung und Abnahme der Betonfestigkeit. Die Kurve zeigt folgende Charakteristiken: bis zu einer Temperatur von ungefähr 80° bis 90° C reißt der Querschnitt zunehmend auf, bei 100° C Innentemperatur und einem Druck von 200 kN/m^2 gehen die Risse bereits durch die gesamte Wanddicke, danach verlaufen die Verschiebungen linear, was bedeutet, daß keine großen Steifigkeitsänderungen mehr auftreten.

Die Bilder 5.28, 5.29 und 5.30 zeigen die der 18. Laststufe zugeordneten Verteilungen der Schnittkräfte $n\varphi$, m_x und m_φ entlang der Höhe. Zum Vergleich sind die Verläufe für die linear elastische Rechnung mit homogenem Material eingetragen. Aus den Darstellungen geht deutlich das nichtproportionale Verhalten der Struktur hervor. Hier zeigt sich, daß die Normalkraft im mittleren Bereich, die aus dem Innendruck entsteht, sich bei Rißbildung lediglich umlagert, während in den Randzonen die Abnahme der Steifigkeit eine Änderung der Größe der Normalkraft bedeutet. Da die Wand infolge der Belastung aus Innendruck und Temperatur aufreißt, werden die Zwangsmomente schnell abgebaut. Dieser Zusammenhang wird durch das Programm gut wiedergegeben.

Die rechnerisch ermittelten Rißbilder sind für die Belastung von 360 kN/m^2 bei einer Innentemperatur von 200°C in Bild 5.31 abgebildet. Jeder Strich kennzeichnet die Rißrichtung in diesem Bereich. Wie zu erwarten, überwiegt die vertikale Rißrichtung, verursacht durch die Zugkraft infolge des Radialdrucks und des Zwangmomentes aus Temperatur.

Festzustellen ist, daß der Behälter trotz fortgeschrittener Rißentwicklung bei einem Temperaturgradienten von 180 K und einem Druck von über 3 bar noch in der Lage ist, die Beanspruchung zu tragen und einen Gleichgewichtszustand zu finden. Dies ist nur deshalb möglich, weil die Zwangbeanspruchung aus Temperatur infolge der Verringerung der Steifigkeit weitgehend abgebaut wird. Insofern kommt einem Modell, welches dieses Verhalten berücksichtigen kann, große Bedeutung zu.

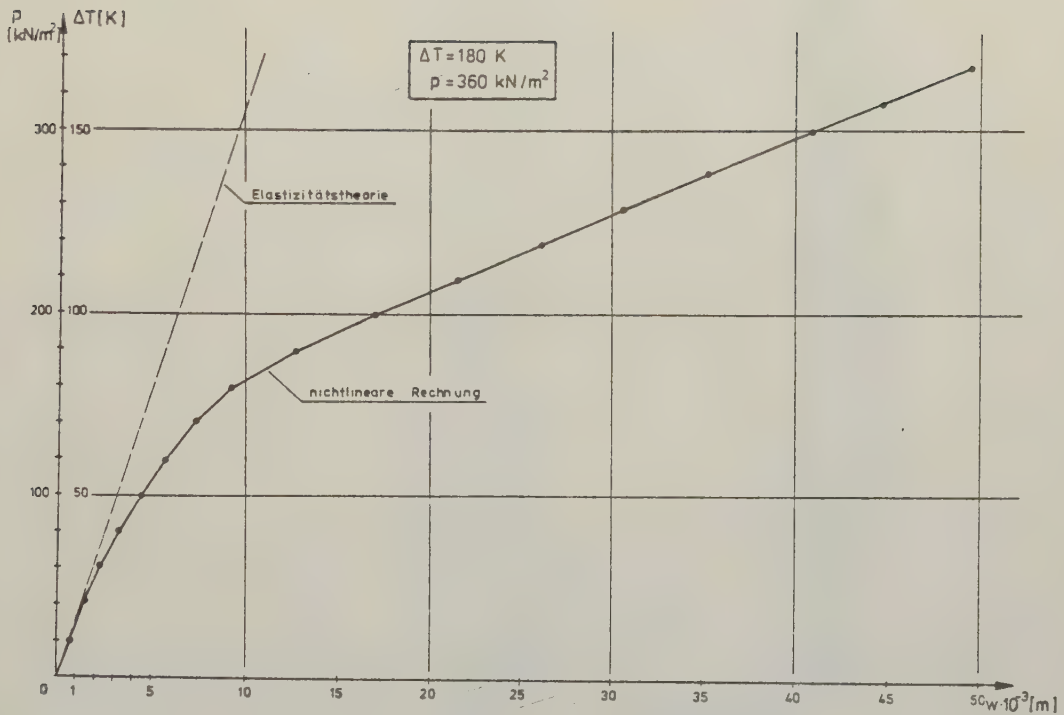


Bild 5.27: Temperatur-/Last-Verschiebungs-Kurve
in der Behältermitte
(Punkt 27: $x = 9,5 \text{ m}$)

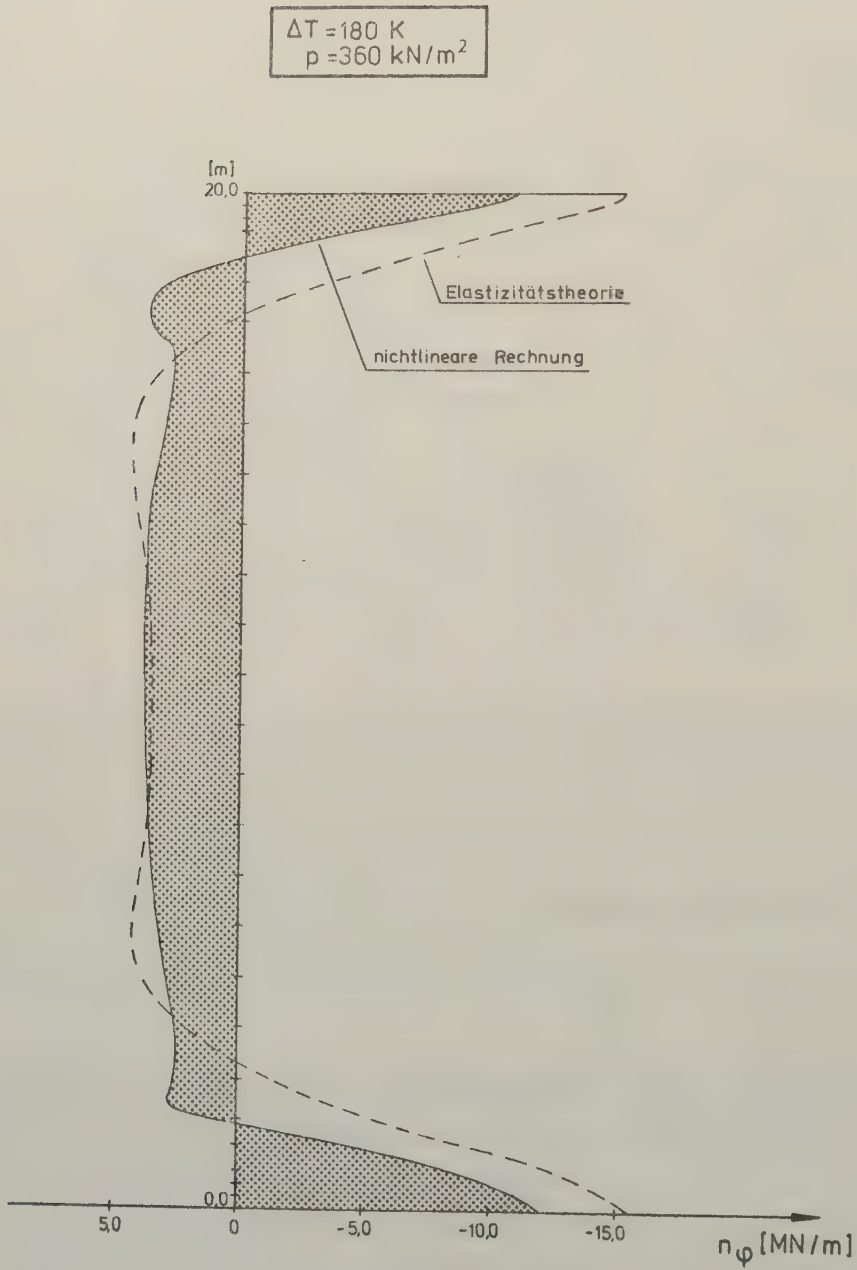


Bild 5.28: Normalkräfte n_φ bei $\Delta T = 180 \text{ K}$ und $p = 360 \text{ kN/m}^2$

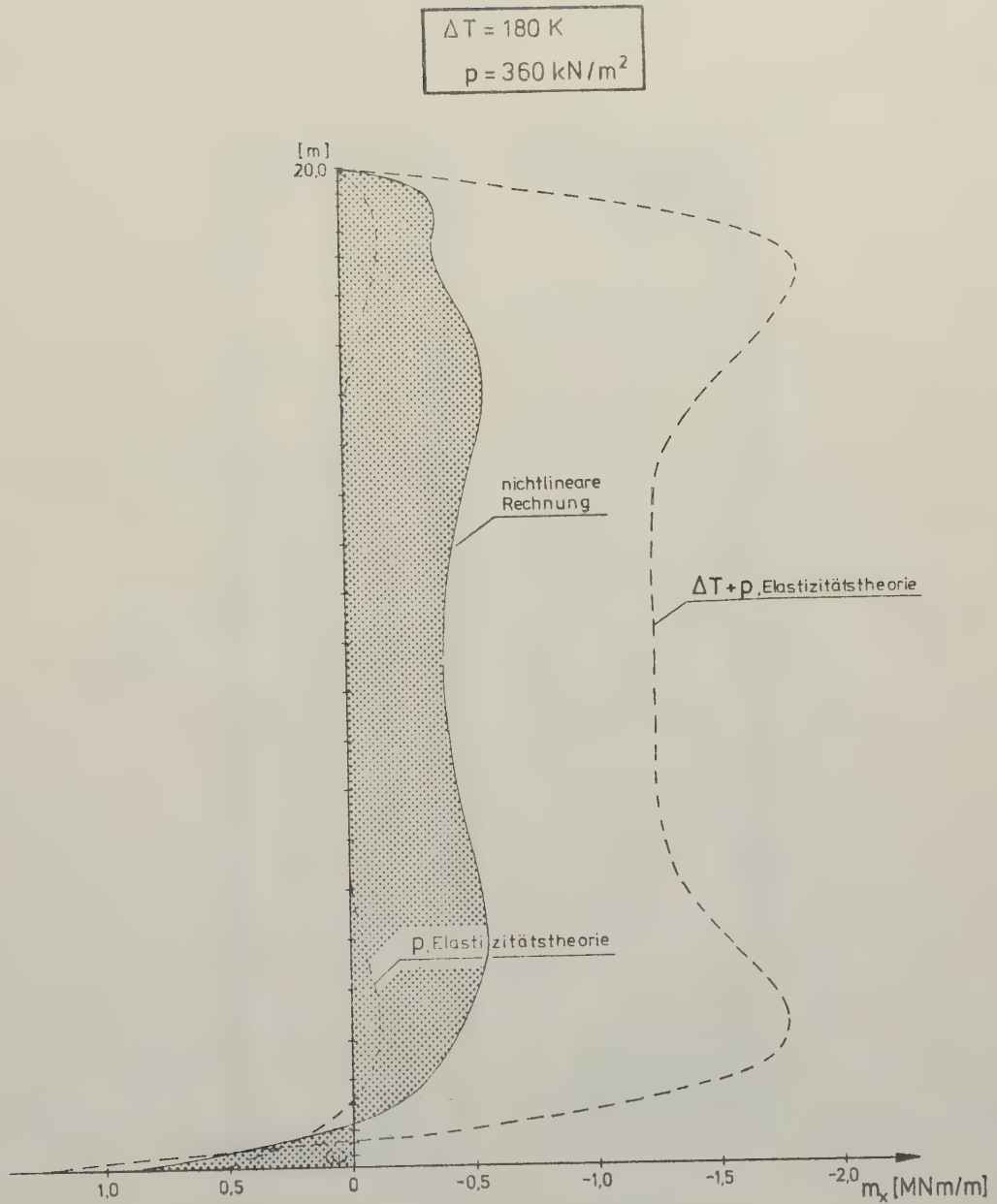


Bild 5.29: Biegemomente m_x bei $\Delta T = 180 \text{ K}$ und $p = 360 \text{ kN/m}^2$

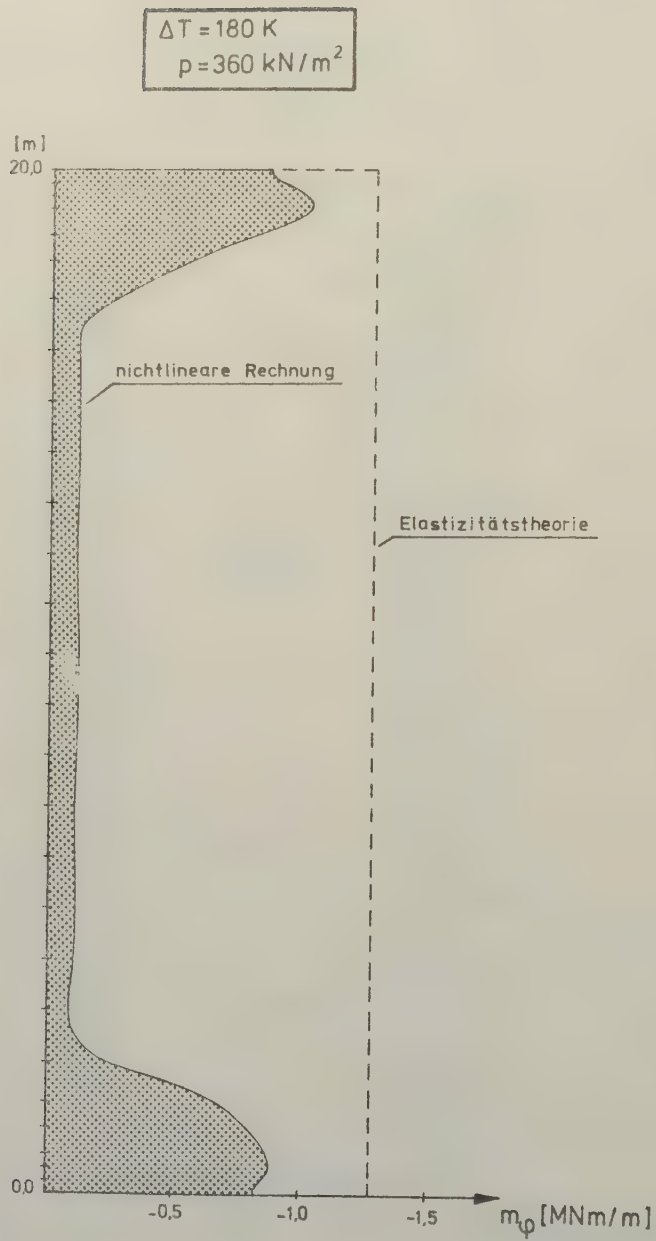


Bild 5.30: Biegemomente m_φ bei $\Delta T = 180 \text{ K}$ und $p = 360 \text{ kN/m}^2$

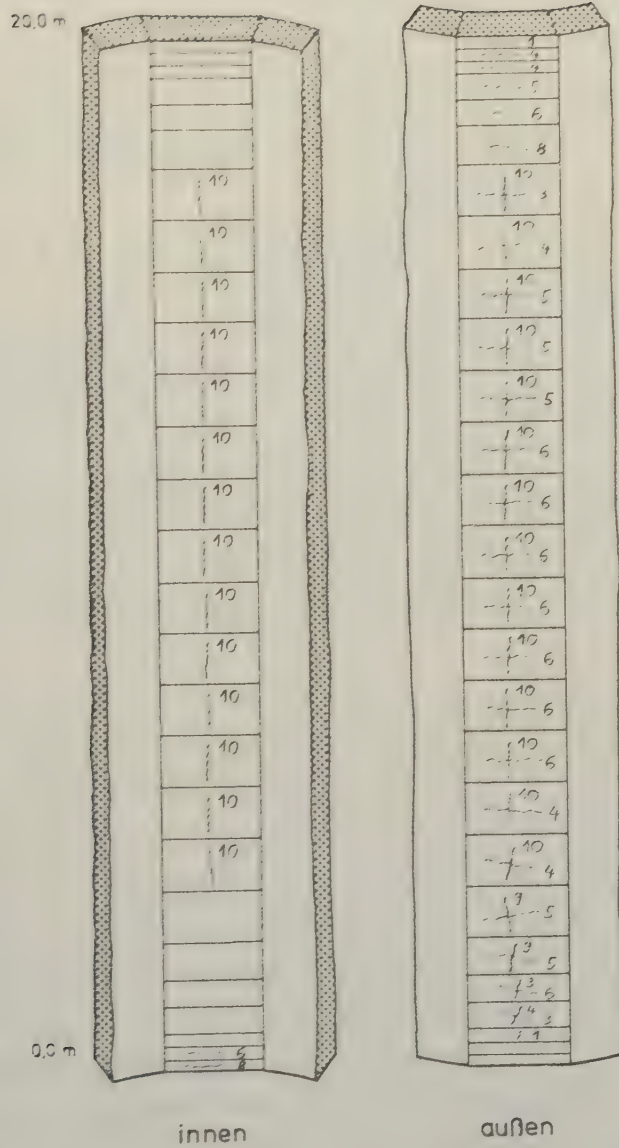


Bild 5.31: Rißbilder an der Behälterinnen- und -außenseite bei $\Delta T = 180 \text{ K}$ und $p = 360 \text{ kN/m}^2$ (Zahlen $\hat{=}$ Anzahl der gerissenen Schichten)

5.3.3 Behälter unter tiefen Temperaturen

Die Darstellung der Ergebnisse unter der Annahme, daß im Behälter tiefe Temperaturen von -160°C auftreten, umfaßt folgende Abbildungen:

Bild 5.32: die Normalkräfte n_{φ} bei $\Delta T = -180\text{ K}$

Bild 5.33: die Normalkraft n_{φ} am unteren Rand ($x = 0,0\text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

Bild 5.34: die Biegemomente m_x bei $\Delta T = -180\text{ K}$

Bild 5.35: die Biegemomente m_{φ} bei $\Delta T = -180\text{ K}$

Bild 5.36: die Biegemomente m_x in Behältermitte in Abhängigkeit der Temperatur

Bild 5.37: wie Bild 5.36, aber als auf den Zustand I bezogene Größen

Bild 5.38: die Rißbilder an der Behälterinnen- und -außenseite bei $\Delta T = -100\text{ K}$

Bild 5.39: wie Bild 5.38, aber bei $\Delta T = -180\text{ K}$

Für diesen Fall ergeben sich vollkommen andere Ergebnisse als bei Hochtemperaturbelastung. Während die linear elastische Rechnung nur andere Vorzeichen liefert, hat die Tatsache, daß anstatt von Druckkräften Zugkräfte auftreten, bei dem nicht-linearen Modell einen entscheidenden Einfluß auf die Ergebnisse. Dies geht aus der Darstellung der Ringkräfte n_{φ} aus Bild 5.32 deutlich hervor. Die Zugkräfte, die im Zustand I bei ungerissenem Querschnitt entstehen, werden fast vollständig durch Rißbildung abgebaut. Die verbleibenden Zwangskräfte n_{φ} werden bei Gradienten größer als 70 K fast nur noch durch die Stahleinlagen bestimmt (Bild 5.33). Die Bilder 5.34 und 5.35 zeigen die Biegemomente bei $\Delta T = -180\text{ K}$. Die Abnahme der Zwangsmomente verläuft ähnlich zu der Beanspruchung durch hohe Tem-

peraturen, wie ein Vergleich der entsprechenden Bilder hervorhebt. Bild 5.36 stellt die Nichtlinearität der Momente im mittleren Bereich des Behälters noch einmal in Abhängigkeit der Temperaturstufe heraus. Bezieht man diese Biegemomente auf die Ergebnisse nach der Elastizitätstheorie, so erkennt man, daß die Temperatur, bei der der Querschnitt zum ersten Mal reißt, durch die Erhöhung der Biegezugfestigkeit etwa bei -40°C liegt. Dies entspricht einem Temperaturunterschied von $\Delta T = 60 \text{ K}$ (Bild 5.37).

Die Reißbilder (Bild 5.38 und 5.39) für Temperaturdifferenzen von 100 K und 180 K lassen erkennen, welchen großen Einfluß die Randstörungen bei Tieftemperaturbeanspruchung haben. Bei einem Temperaturunterschied von 100 K ist der Behälter am oberen und unteren Rand zu 90 % seines Querschnittes gerissen. Im mittleren Bereich tritt keine Gefährdung des Behälters auf.

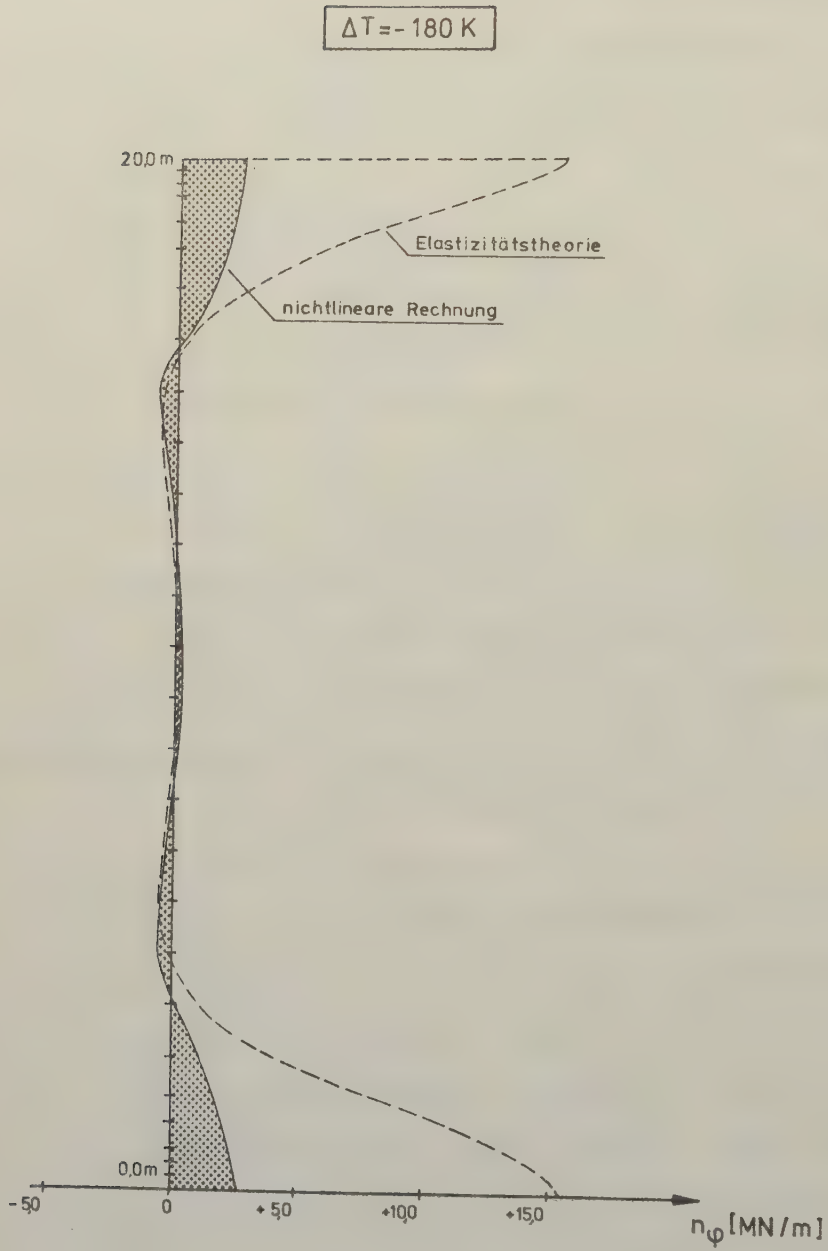


Bild 5.32: Normalkräfte n_φ bei $\Delta T = -180 \text{ K}$

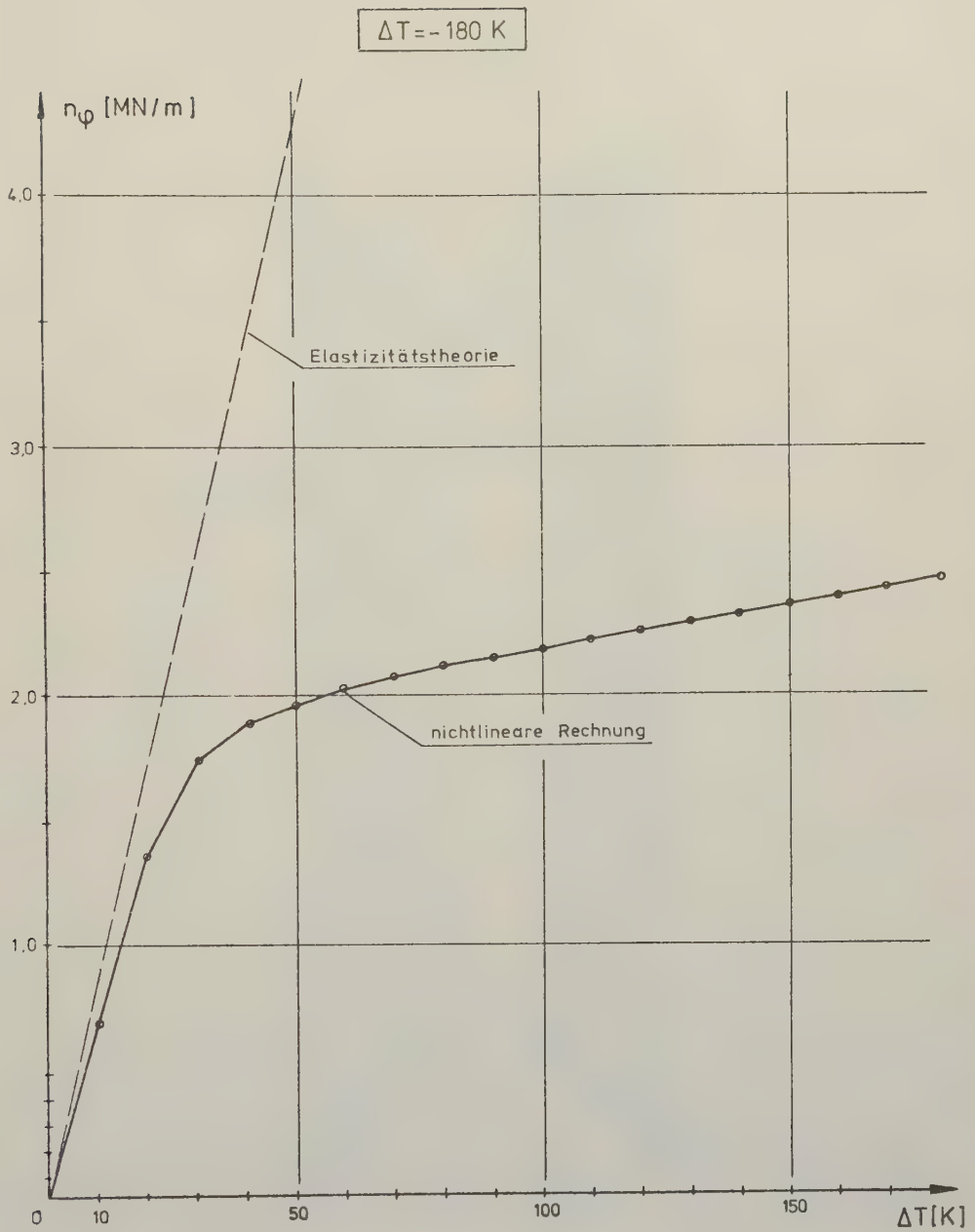


Bild 5.33: Normalkraft n_φ am unteren Rand ($x = 0,0 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

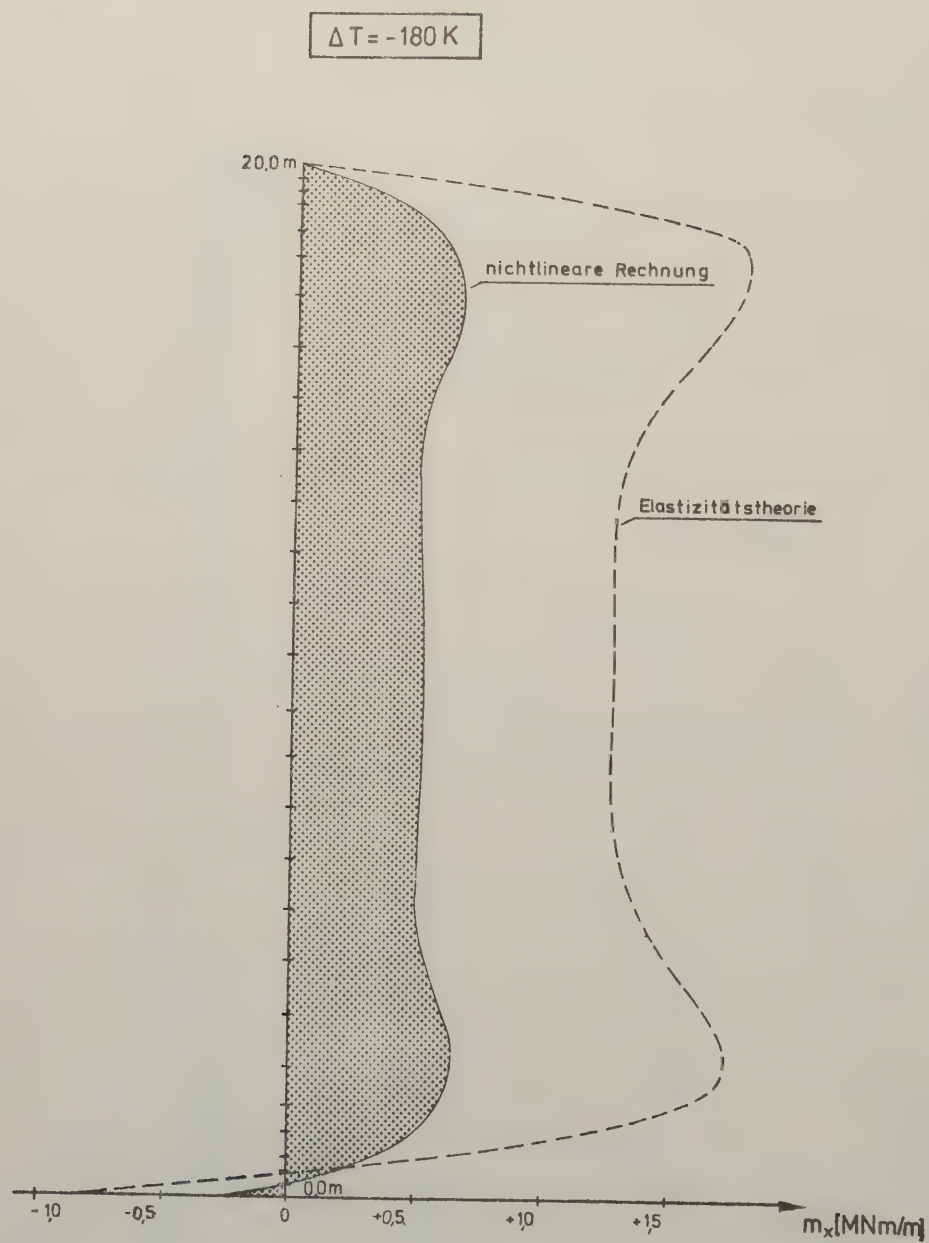


Bild 5.34: Biegemomente m_x bei $\Delta T = -180 \text{ K}$

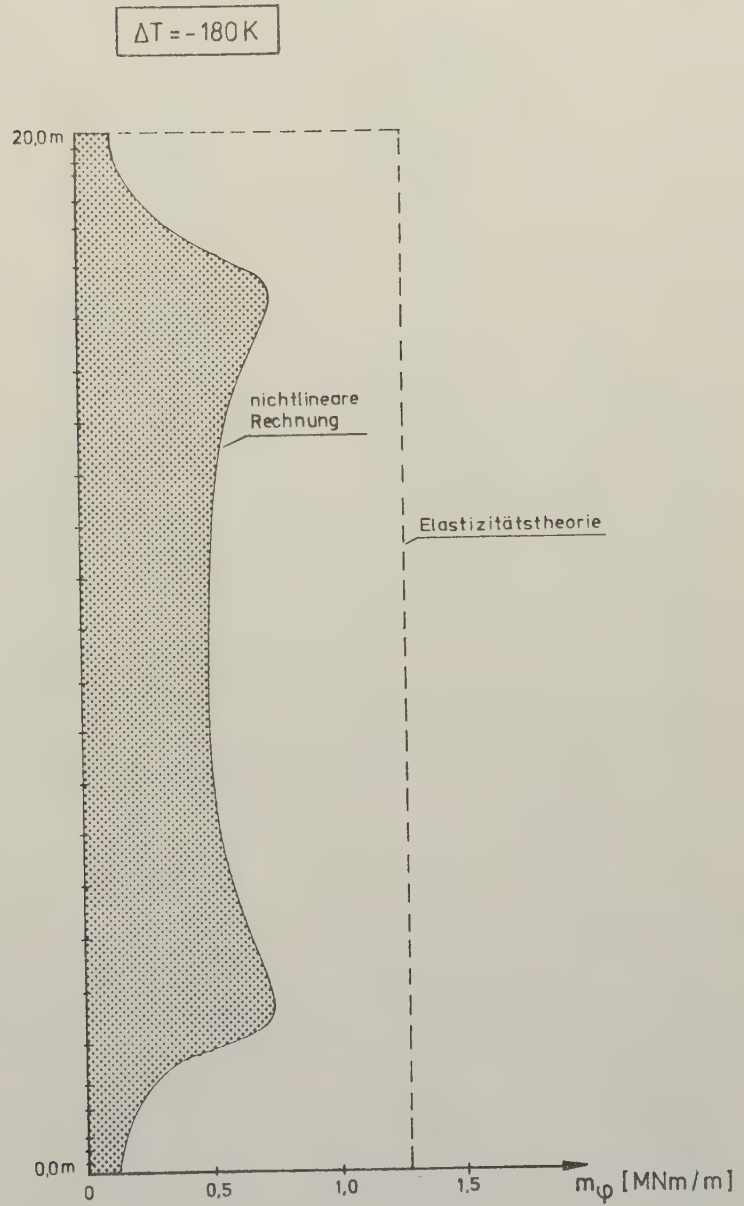


Bild 5.35: Biegemomente m_φ bei $\Delta T = -180 \text{ K}$

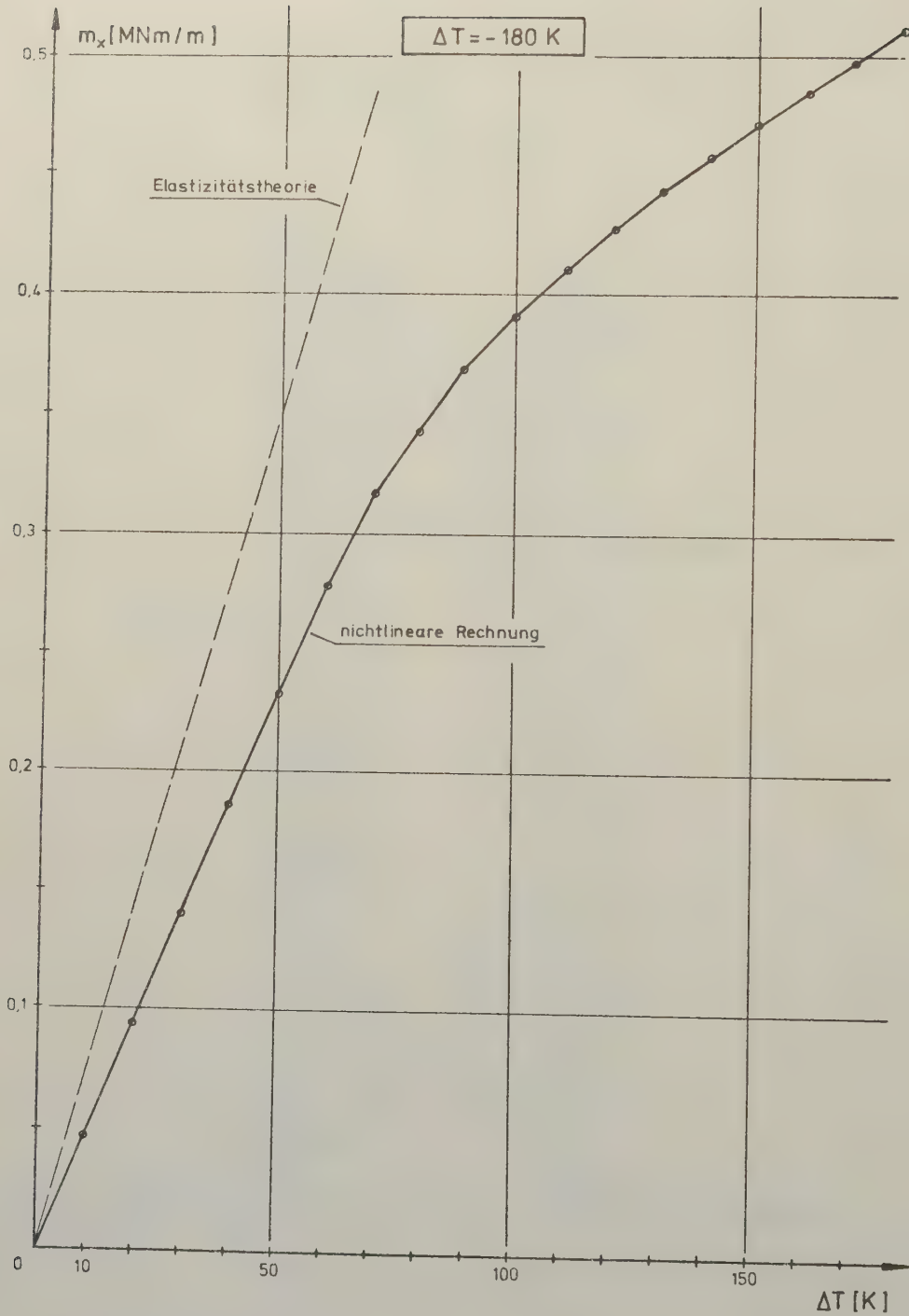


Bild 5.36: Biegemomente m_x in Behältermitte ($x = 10,0 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

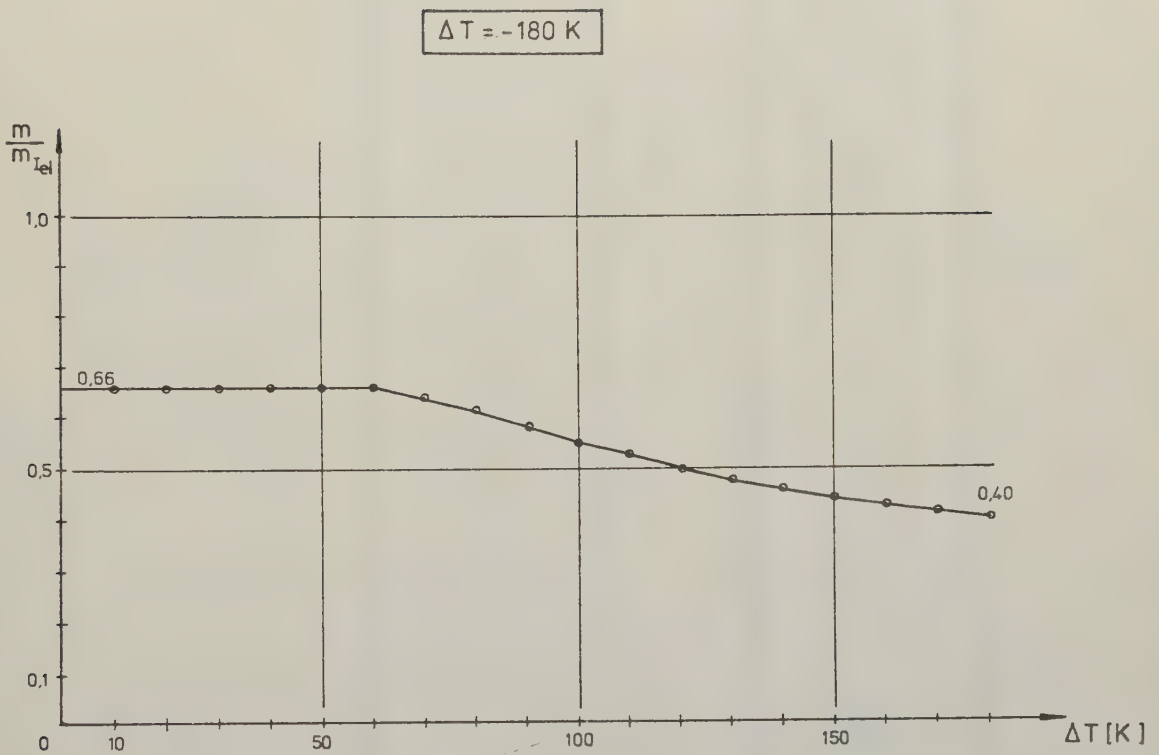


Bild 5.37: Auf den Zustand I bezogene Biegemomente m_x in Behältermitte ($x = 10,0 \text{ m}$) in Abhängigkeit der Temperatur

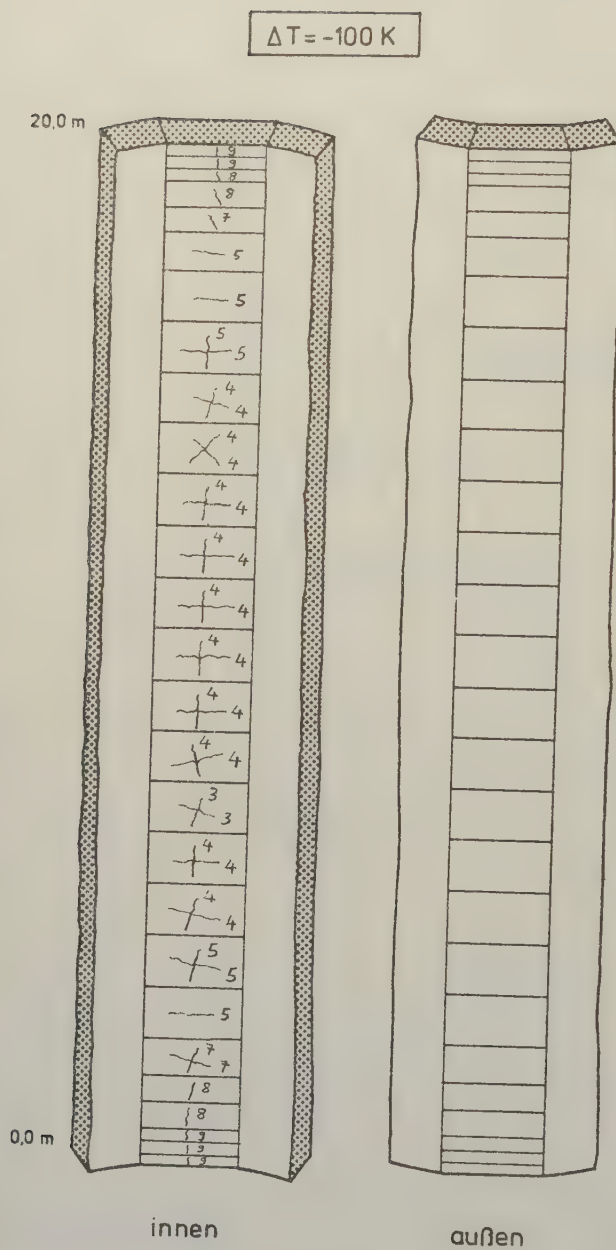


Bild 5.38: Rißbilder an der Behälterinnen- und -außenseite bei $\Delta T = -100 \text{ K}$ (Zahlen $\hat{=}$ Anzahl der gerissenen Schichten)

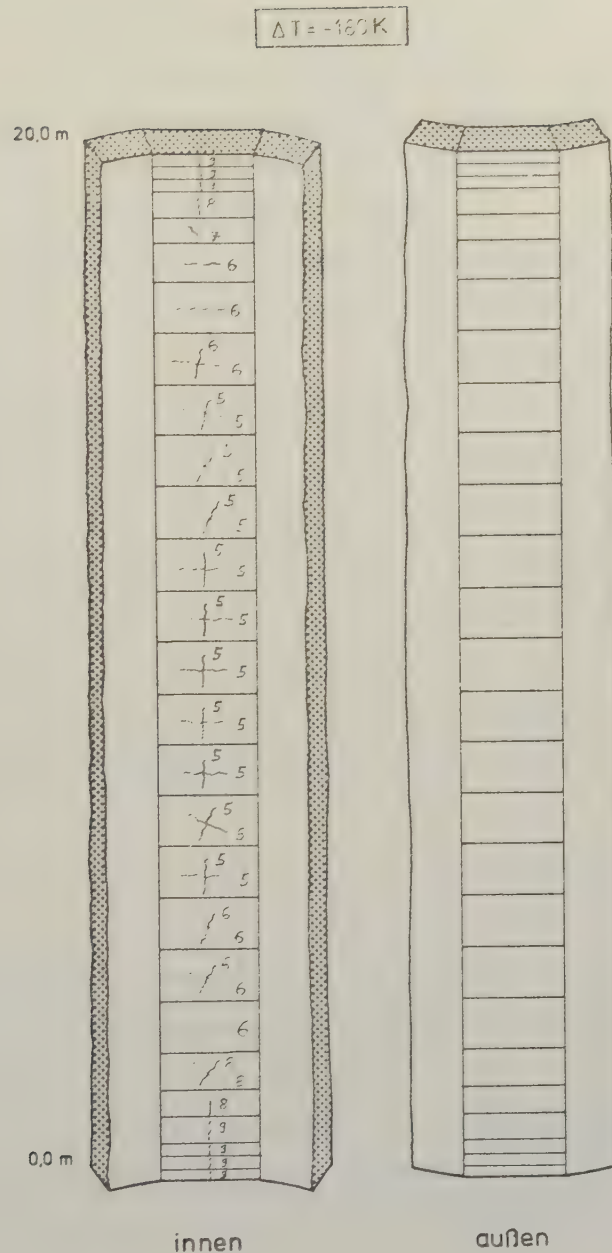


Bild 5.39: Reißbilder an der Behälterinnen- und -außenseite bei $\Delta T = -180\text{ K}$ (Zahlen $\hat{=}$ Anzahl der gerissenen Schichten)

5.4 Parameteruntersuchungen

Da Parameteruntersuchungen für den gesamten Behälter nur sehr schwer vorzunehmen sind, weil ein hoher numerischer Aufwand erforderlich ist und eine große Datenmenge anfällt, wird im folgenden nur noch der mittlere ungestörte Bereich des Behälters untersucht. Da dieser Bereich konstante Schnittgrößen aufweist, genügt es, die Diskretisierung auf 2 Elemente zu beschränken (Bild 5.40). Diese Annahme ermöglicht es, neben den Normalkräften und Biegemomenten auch Spannungen auszudrucken. Dies ist erforderlich, wenn bei beliebigen Temperaturgradienten und bei unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten Eigenspannungen entstehen, die keine Schnittgrößen zur Folge haben. Darüberhinaus können die Berechnungen anhand der nachfolgenden Studien besser gedeutet werden, da jeglicher Einfluß der Diskretisierung auf die Lösung entfällt. Bei den Untersuchungen werden folgenden Problemstellungen unterschieden:

1. hohe Temperaturen
2. tiefe Temperaturen unter normalen Umweltbedingungen
3. tiefe Temperaturen unter Wasserlagerung

Diese 3 Alternativen können jeweils mit 4 unterschiedlichen Methoden des nichtlinearen Modells analysiert werden (Tafel 5.1):

1. lineare Temperaturverteilung,
herkömmliches Materialgesetz
2. lineare Temperaturverteilung,
temperaturabhängiges Materialgesetz
3. nichtlineare Temperaturverteilung,
herkömmliches Materialgesetz
4. nichtlineare Temperaturverteilung,
temperaturabhängiges Materialgesetz

	lineare Temperatur- verteilung	nichtlineare Temperatur- verteilung
herkömmliches Materialgesetz	Methode 1	Methode 3
temperaturabhängiges Materialgesetz	Methode 2	Methode 4

Tafel 5.1: Angewandte Methoden zur nichtlinearen
Analyse temperaturbeanspruchter Scha-
lentragwerke

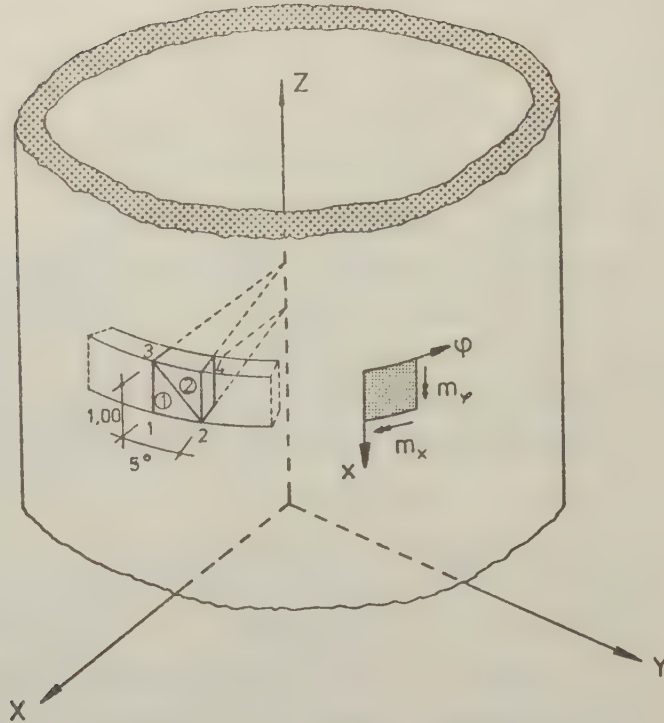
Randbedingungen

Knoten 1 u. 2:

$$u=v=\varphi_x=\varphi_y=0$$

Knoten 3 u. 4:

$$v=\varphi_x=\varphi_y=0$$



System

$$R = 10,00 \text{ m}$$

$$d = 0,50 \text{ m}$$

$$d/R = 1/20$$

Material

Beton B35:

$$E_b = 34 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta_{ws} = 40 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta_z = 3 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0$$

$$\alpha_{T_0} = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Stahl St 1350/1500:

$$\mu = 0,25\% \text{ je Seite und Richtung}$$

$$E_s = 210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta_s = 1350 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\alpha_{T_0} = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Querschnitt

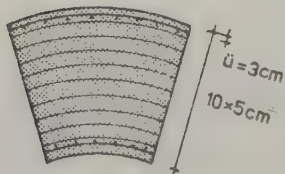


Bild 5.40: Behälterausschnitt

5.4.1 Behälterausschnitt unter hohen Temperaturen

In diesem Beispiel wird angenommen, daß der Behälter auf seiner Innenseite auf 170 °C erwärmt wird, während die Außenseite eine Temperatur von 20 °C hat. Wie bereits oben erwähnt, wird sowohl eine lineare Temperaturverteilung als auch eine nicht-lineare Temperaturverteilung untersucht, wobei bei letzterer ein parabelförmiger Temperaturverlauf der Form $\Delta T = c \cdot z^2$ vorausgesetzt wird. Beide Beanspruchungen werden jeweils einmal ohne und einmal mit Berücksichtigung des temperaturabhängigen Materialgesetzes berechnet. Als Temperaturinkrement wird ein Inkrement von $\Delta T = 10$ K angesetzt.

Für die beiden Elemente sind die Temperatur-Verformungs-Kurven in Bild 5.41 aufgetragen. Daraus ist zu entnehmen, daß sowohl die Rißbildung als auch die Annahme über die Art des Temperaturverlaufs über den Querschnitt einen Einfluß auf die Verformungen haben, daß jedoch die Festigkeitseinbuße des Materials keine nennenswert anderen Verschiebungen zur Folge hat. Die Biegemomente m_φ können für die gesamten durchlaufenen Laststufen bis 150 K aus dem Bild 5.42 entnommen werden. Die Verläufe sind relativ geglättet, was auf die kleine Schrittweite und auf die Genauigkeitsabfrage zurückzuführen ist. Die Einbeziehung der temperaturabhängigen Materialgesetze liefert nur geringfügig niedrigere Werte als die Rechnung mit dem herkömmlichen Materialgesetz. Auch lassen nichtlineare Temperaturverläufe kaum Unterschiede zu den linearen Verteilungen erkennen. Da bei der nicht-linearen Rechnung die Spannungen nicht mehr aus den Momenten bestimmt werden können, sind die Ver-

läufe der Betonrandspannungen an der Druckseite in Abhängigkeit des Temperaturgradienten in Bild 5.43a gezeigt. Man erkennt deutlich, daß die quadratischen Temperaturverteilungen zu höheren Betonspannungen führen als die linearen Temperaturverläufe; sie liegen bis zu Temperaturunterschieden von ca. 70 K sogar höher als bei linear elastischer Rechnung. Bei Berücksichtigung der temperaturabhängigen Materialkennwerte nehmen die Betonspannungen um bis zu 20 % ab. Dies bedeutet, daß die Abnahme der Betonfestigkeit mit zunehmender Temperatur nicht die Tragsicherheit gefährdet. Die Stahlspannungen der äußeren Ringbewehrung sind in Abhängigkeit der Temperaturgradienten in Bild 5.43b aufgetragen. Die Risseentwicklung an der Außenseite, wie sie von dem Programm berechnet wird, ist in Bild 5.44 abgebildet.

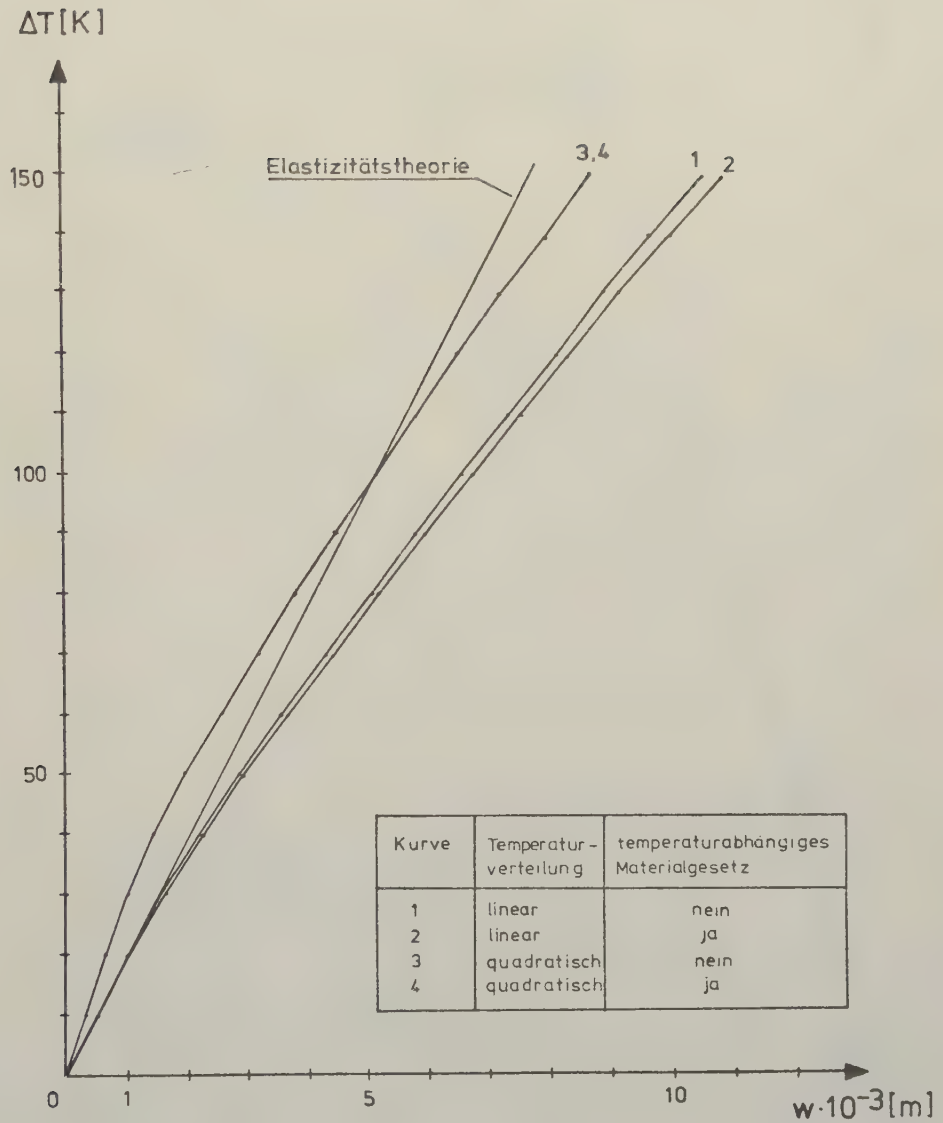


Bild 5.41: Temperatur-Verschiebungs-Kurve unter hohen Temperaturen

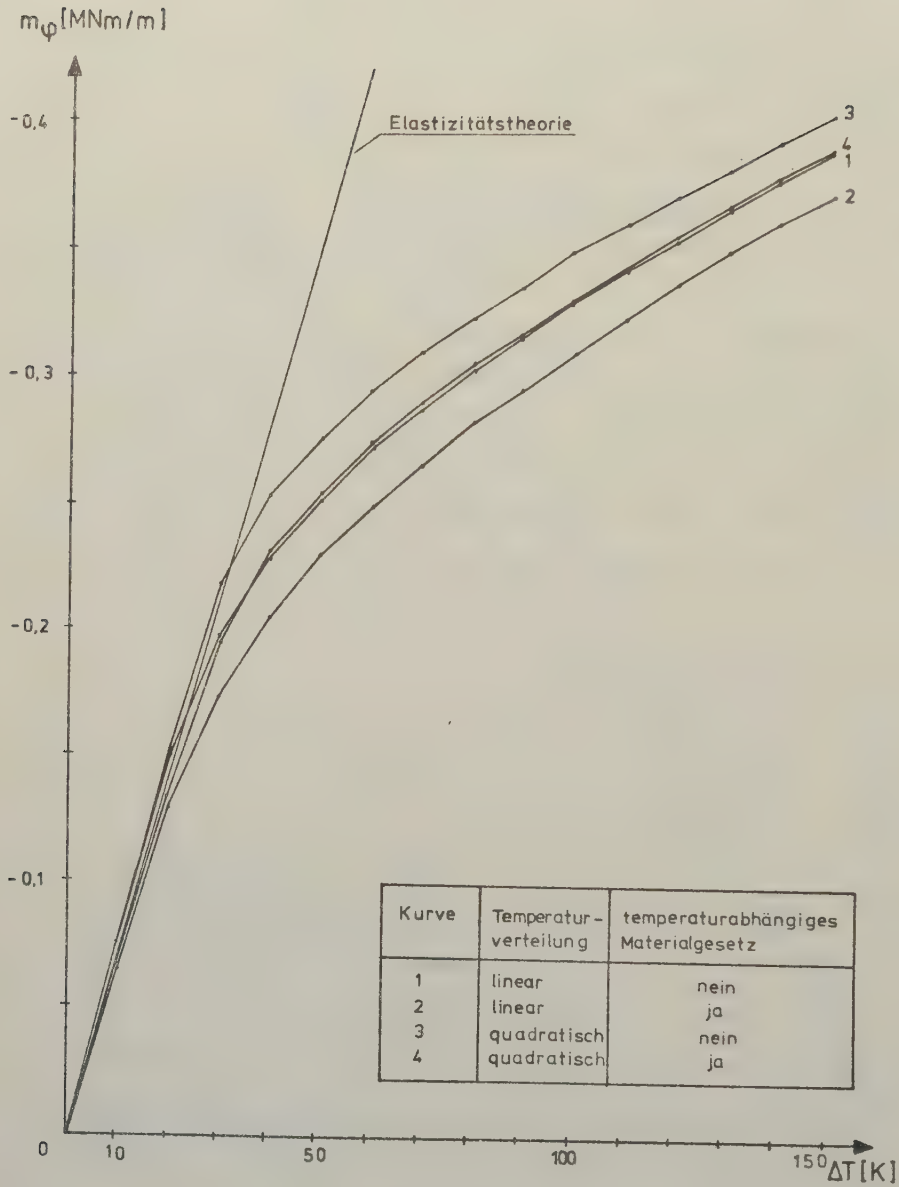


Bild 5.42: Biegemomente m_φ in Abhängigkeit hoher Temperaturen

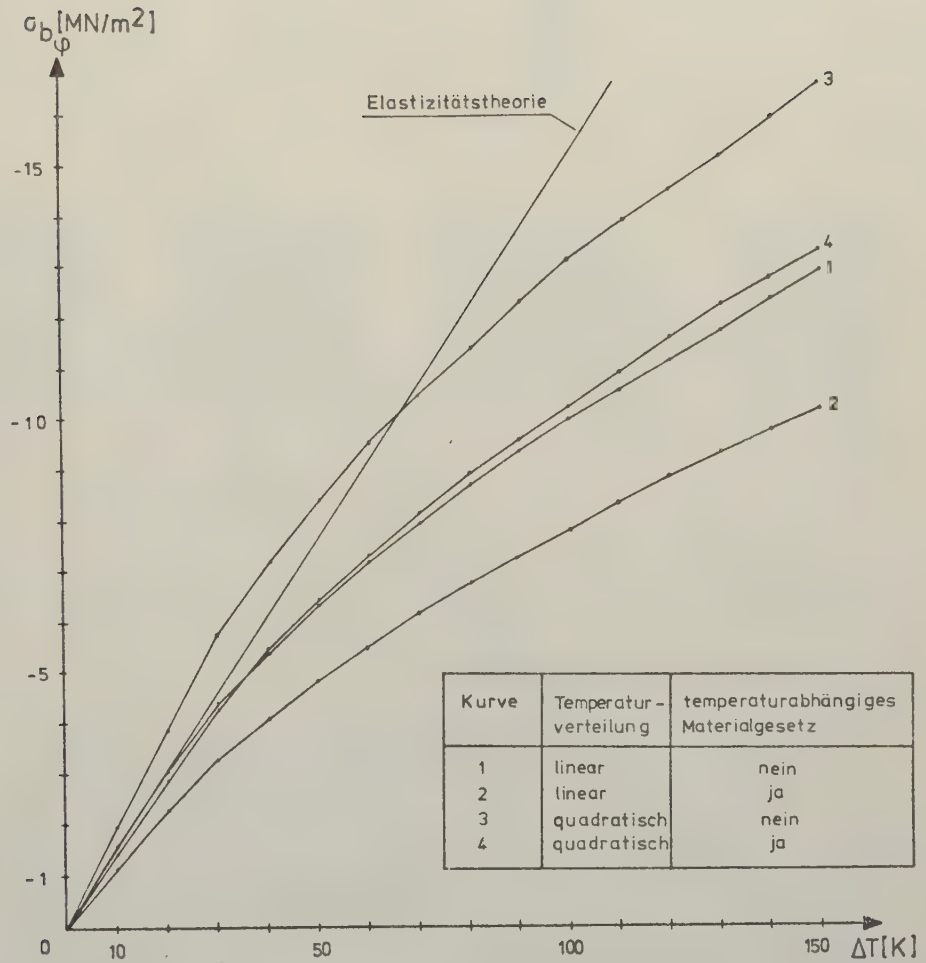


Bild 5.43a: Betonrandspannungen an der Innenseite
in Abhängigkeit hoher Temperaturen

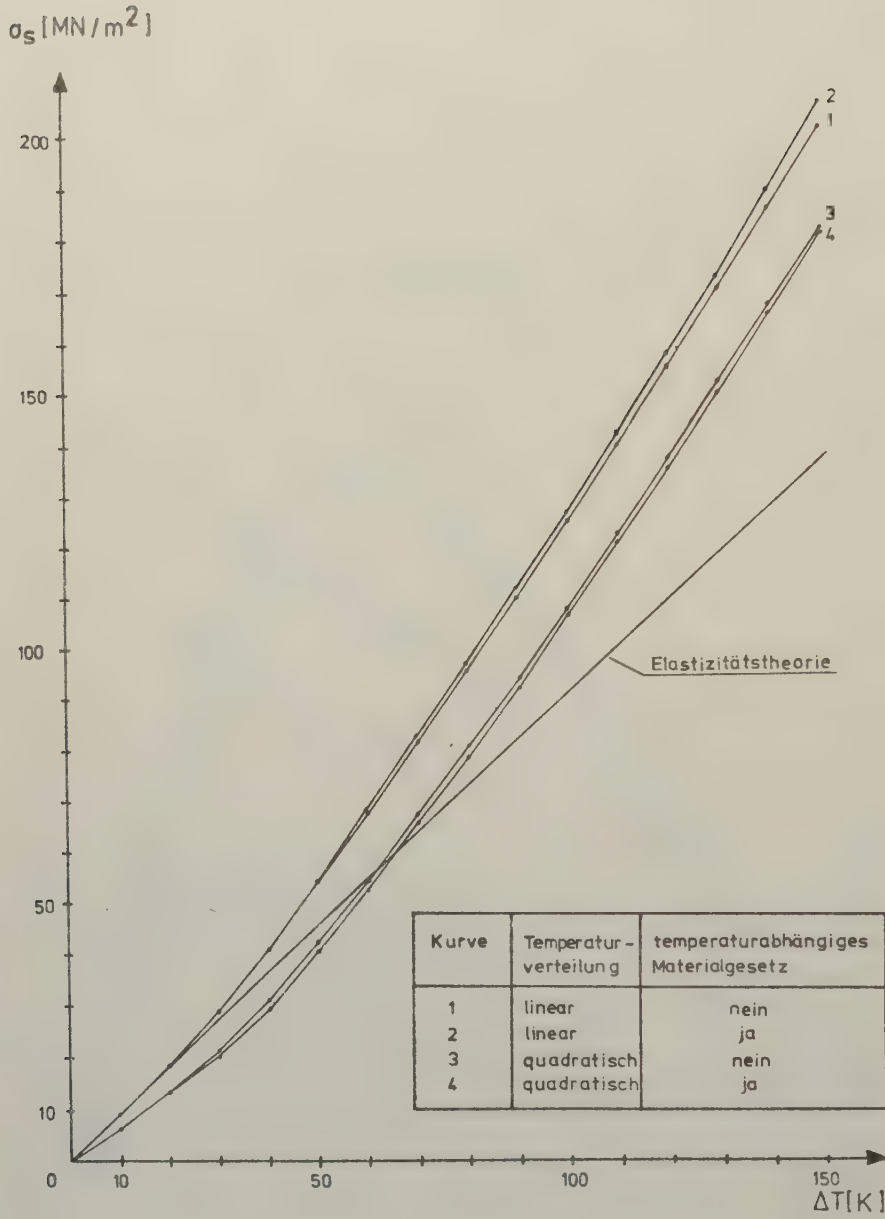


Bild 5.43b: Stahlspannungen der äußeren Ringbewehrung in Abhängigkeit hoher Temperaturen

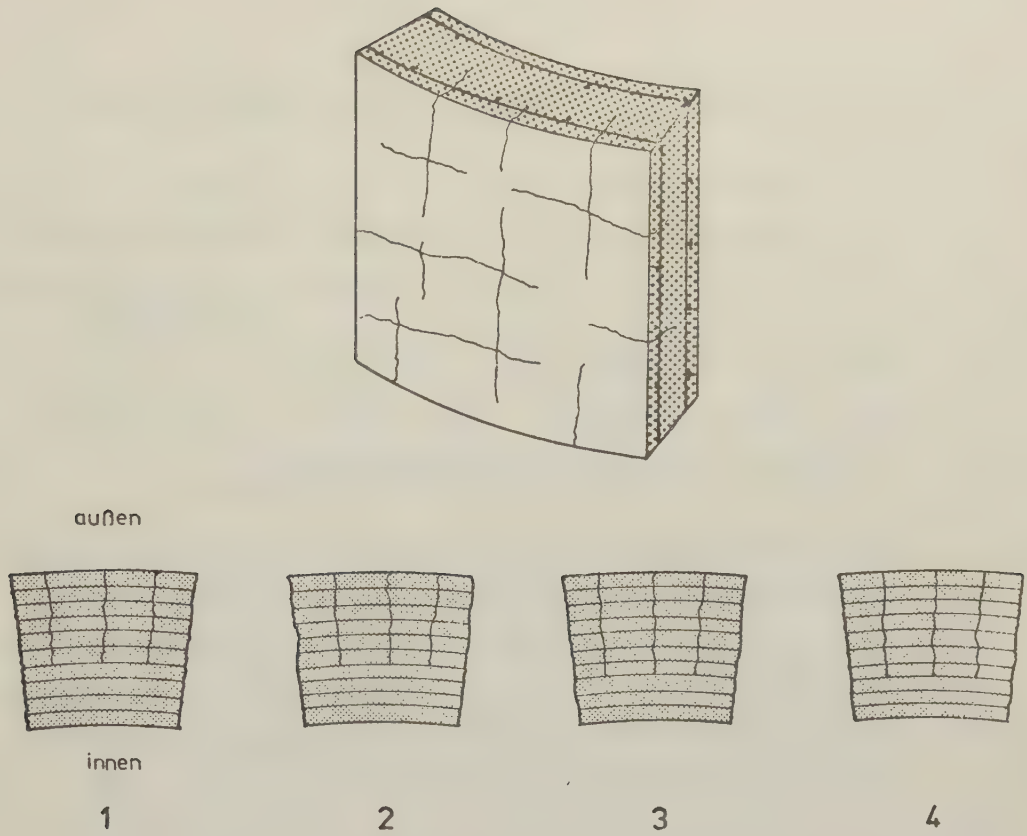


Bild 5.44: Schematische Darstellung des Rißbildes für die Laststufe $\Delta T = +150 \text{ K}$; Riß-tiefen in Abhängigkeit der 4 Methoden

5.4.2 Behälterausschnitt unter tiefen Temperaturen

Als Berechnungsbeispiel für tiefe Temperaturen wird wiederum das Teilstück des oben beschriebenen Behälters gewählt. Die Schale werde auf ihrer Innenseite auf eine Temperatur von -160°C abgekühlt, während die Außenseite eine Temperatur von 20°C hat. Dieses Beispiel lehnt sich an Probleme aus dem Bau von Flüssiggasbehältern an.

Es werden die Ergebnisse einer linearen mit denen einer quadratischen Temperaturverteilung und einer mit bzw. ohne Berücksichtigung des temperaturabhängigen Materialgesetzes durchgeführten Berechnung miteinander verglichen. Als Ergebnisse werden für diesen Fall dargestellt:

- in Bild 5.45: die Momente m_{φ}
- in Bild 5.46a: die Betonrandspannungen $\sigma_{b\varphi}$
an der Außenseite
- in Bild 5.46b: die Stahlspannungen der inneren
Ringbewehrung
- in Bild 5.47: das Rißbild

Im Gegensatz zu der Berechnung unter hohen Temperaturen macht sich bei diesem Beispiel die Anwendung temperaturabhängiger Materialkernwerte deutlicher bemerkbar. Auch liefert der parabelförmig angenommene Temperaturverlauf kleinere Momente und Betonrandspannungen als die lineare Verteilung, während dies bei einer Beanspruchung unter hoher thermischer Belastung gerade umgekehrt war.

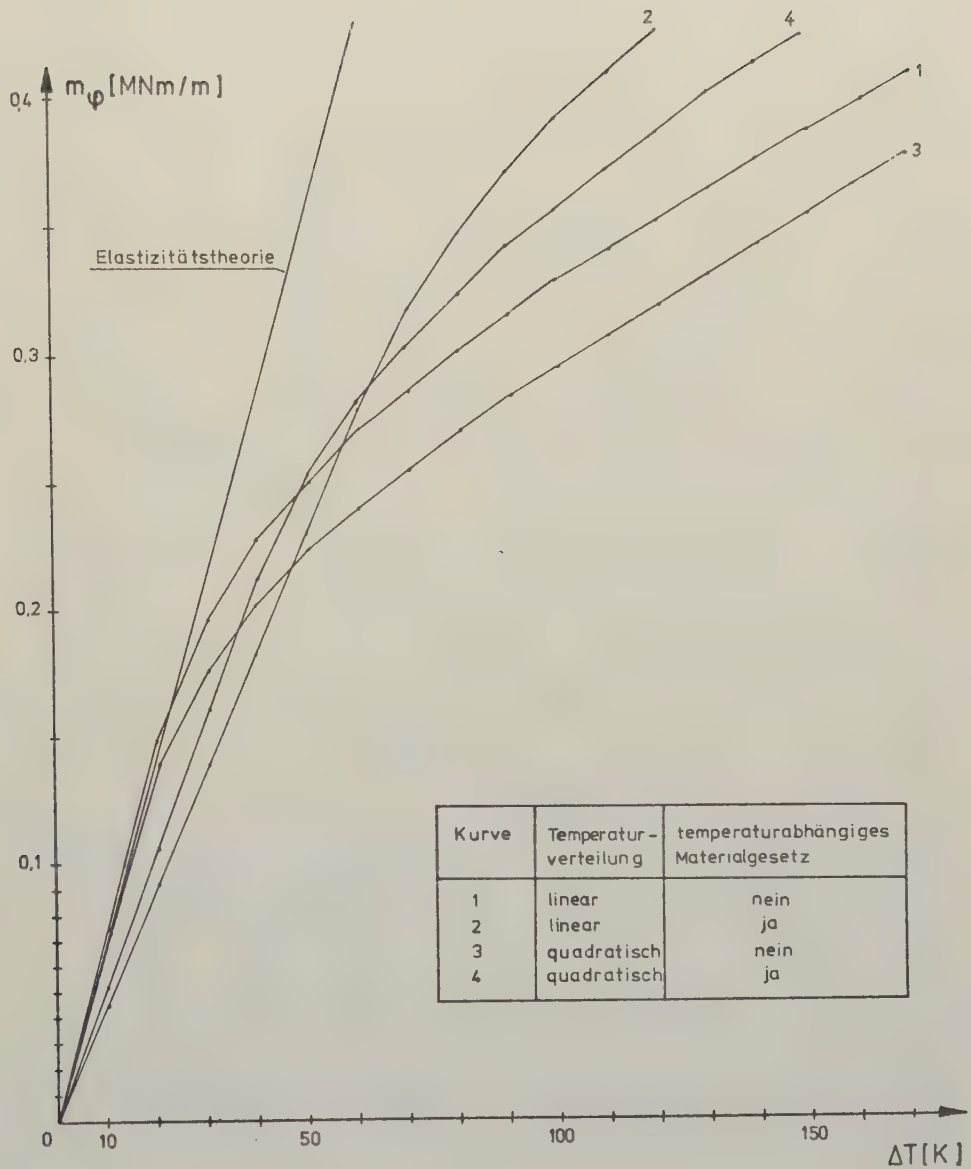


Bild 5.45: Biegemomente m_φ in Abhängigkeit tiefer Temperaturen

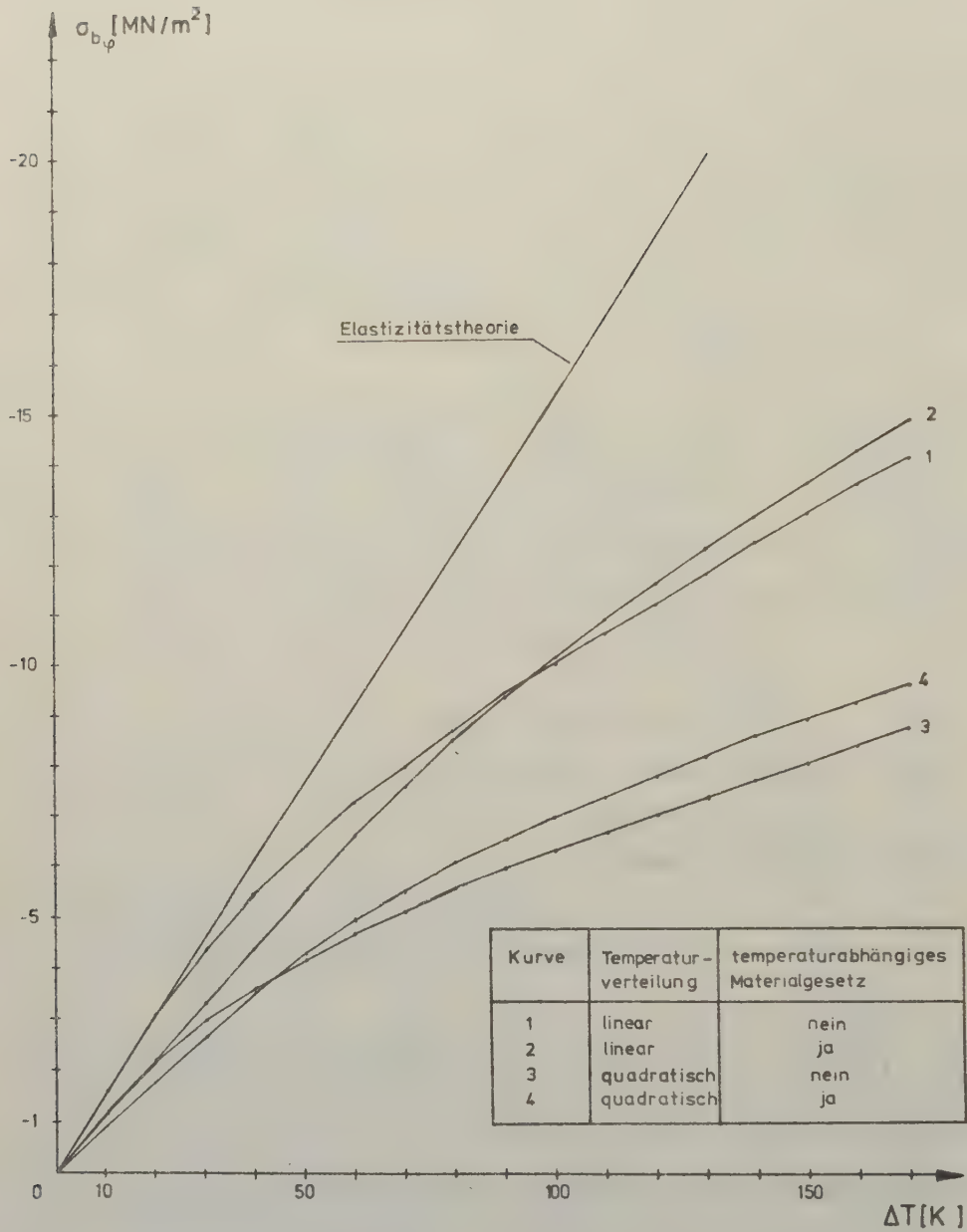


Bild 5.46a: Betonrandspannungen an der Außenseite
in Abhängigkeit tiefer Temperaturen

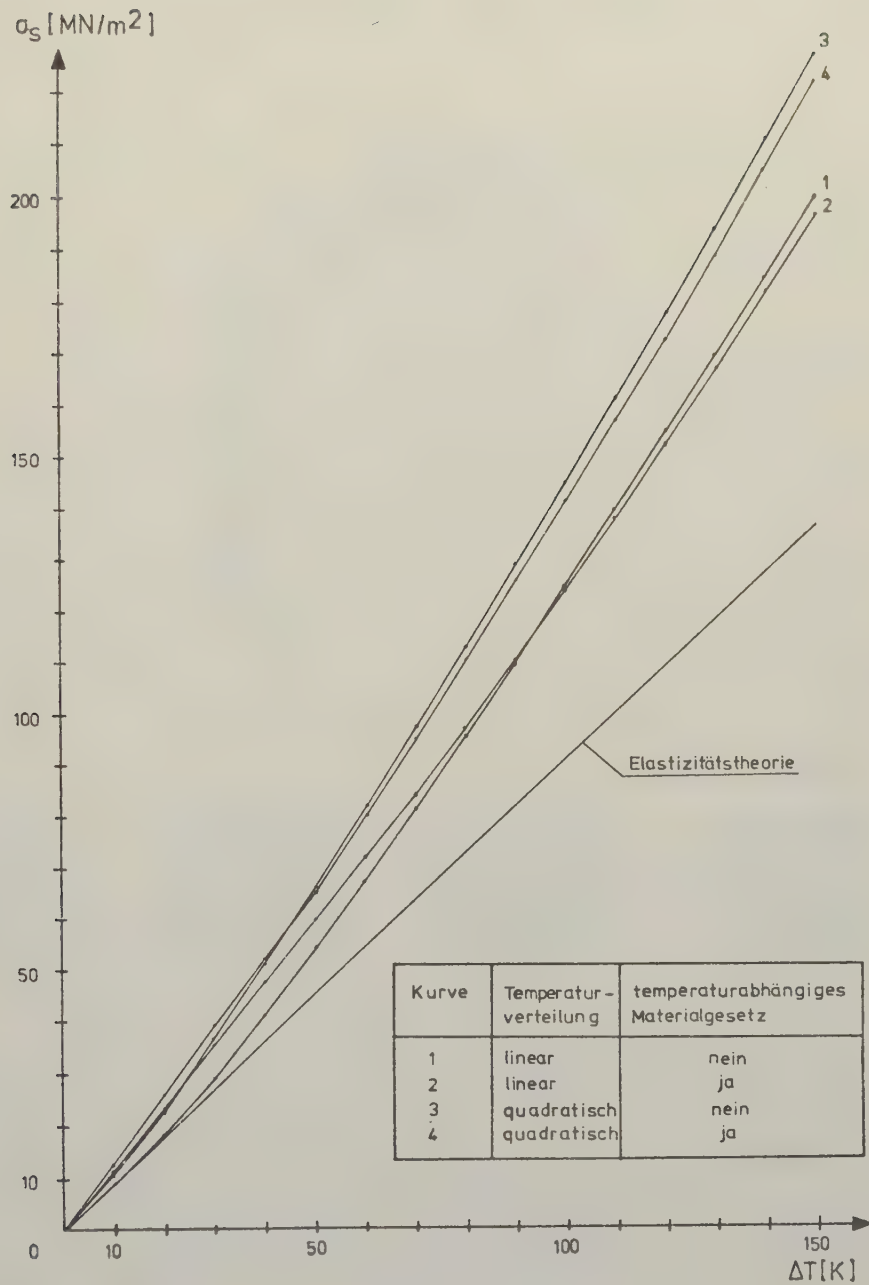


Bild 5.46b: Stahlspannungen der inneren Ringbewehrung in Abhängigkeit tiefer Temperaturen

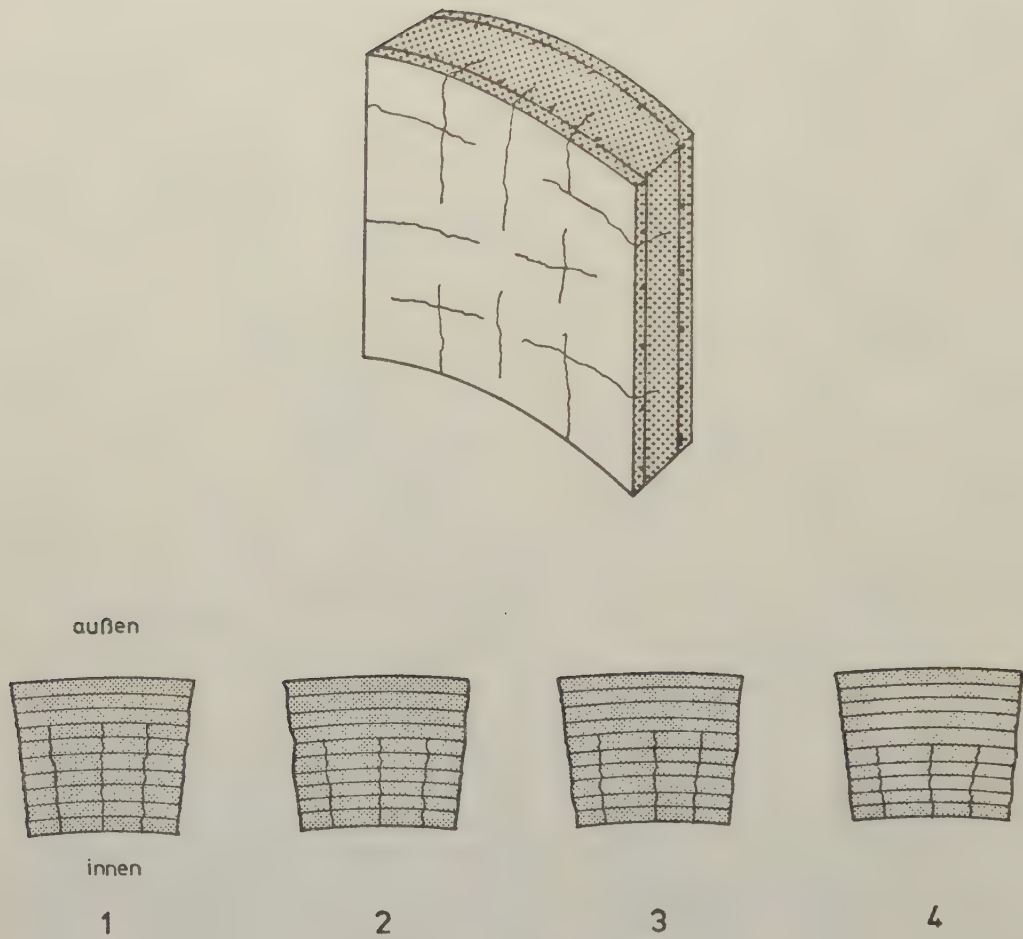


Bild 5.47: Schematische Darstellung des Rißbildes und der Rißtiefen in Abhängigkeit der 4 Methoden für einen Temperaturunterschied von 180 K bei tiefen Temperaturen

5.4.3 Behälterausschnitt unter tiefen Temperaturen bei Wasserlagerung

Im folgenden werden die Rechenergebnisse des Behälters aus dem letzten Beispiel unter der Voraussetzung wiedergegeben, daß die Schale unter Wasser gelagert ist. Diese Berechnungen sollen durch Vergleich der verschiedenen Methoden zeigen, wie sich die Anwendung des temperaturabhängigen mechanischen und thermischen Verhaltens von wassergelagertem Beton auf Verformungen und Schnittgrößen auswirkt. Die Ergebnisse für den Verlauf der Momente m_φ in Abhängigkeit des Temperaturunterschiedes sind aus Bild 5.48 ersichtlich. In Bild 5.49a sind die Betonrandspannungen $G_{b\varphi}$ an der Außenseite zusammengestellt. Man erkennt, daß die Spannungen, die unter der Annahme des temperaturabhängigen Materialgesetzes berechnet wurden, unter den Werte liegen, die unter Verwendung des herkömmlichen Stoffverhaltens ermittelt wurden, obwohl die Momente bei der ersten Methode deutlich größer sind als bei dem zweiten Verfahren. In Bild 5.49b sind die Stahlspannungen der inneren Ringbewehrung in Abhängigkeit des Temperaturgradienten aufgetragen. Bild 5.50 zeigt die Rißtiefe im Querschnitt bei einer Temperatur von -160°C .

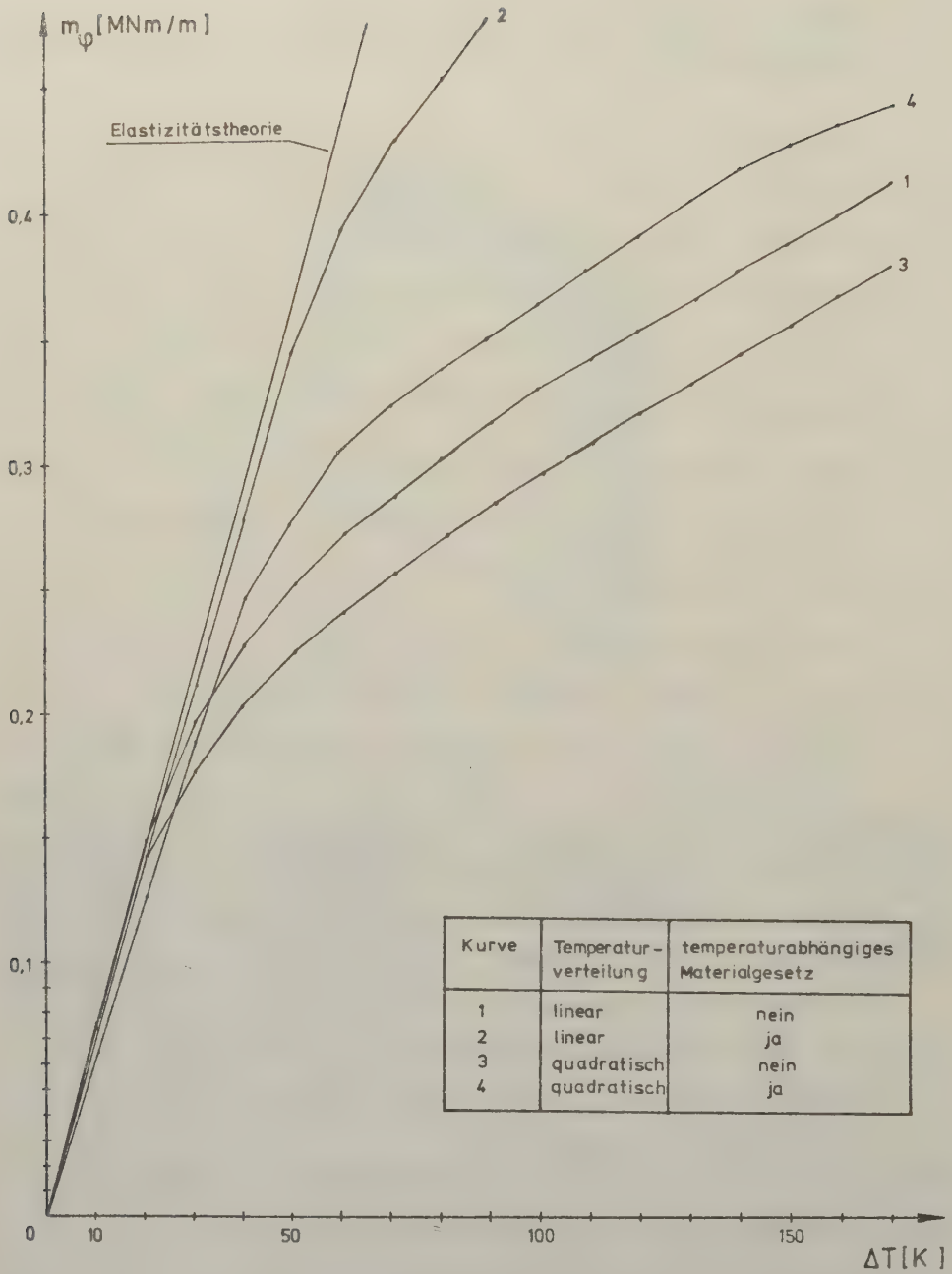


Bild 5.48: Biegemomente m_φ in Abhängigkeit tiefer Temperaturen eines wassergesättigten Betons

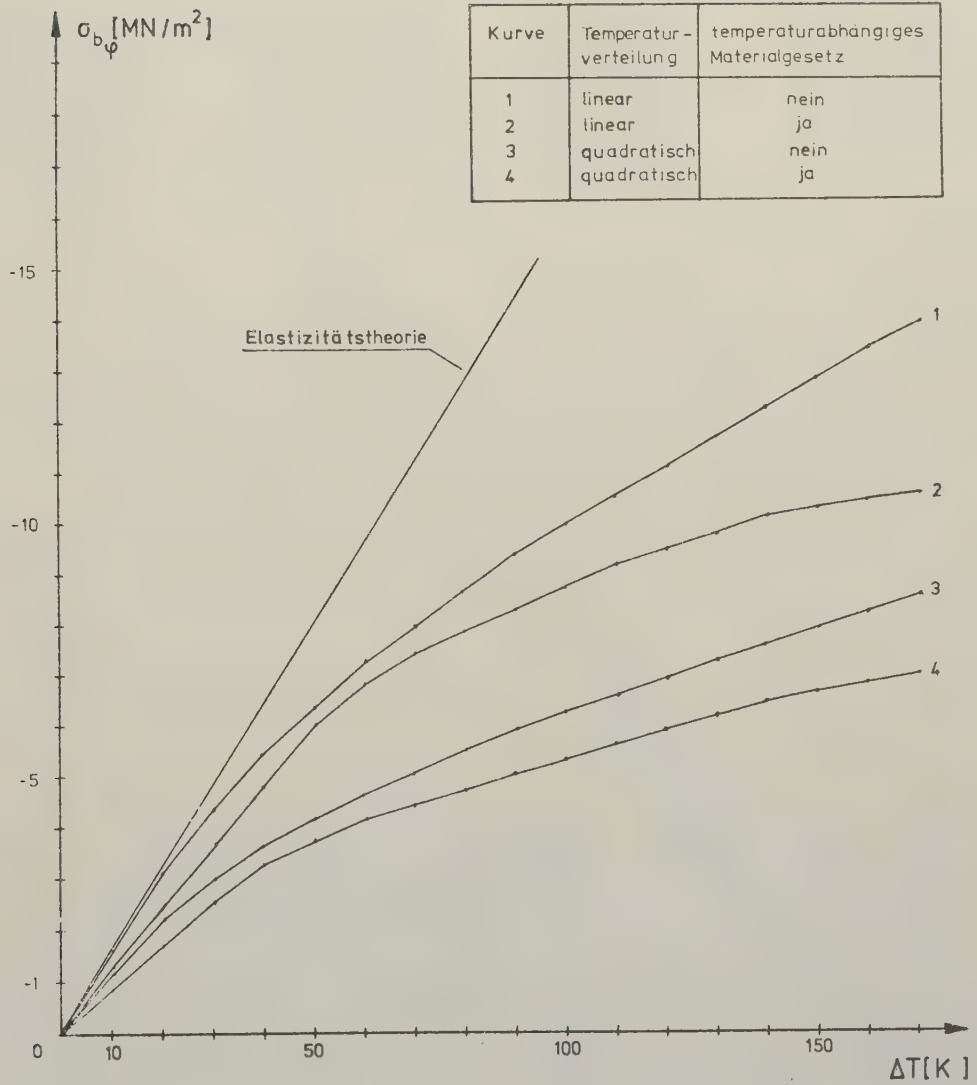


Bild 5.49a: Betonrandspannungen an der Außenseite
in Abhängigkeit tiefer Temperaturen
eines wassergesättigten Betons

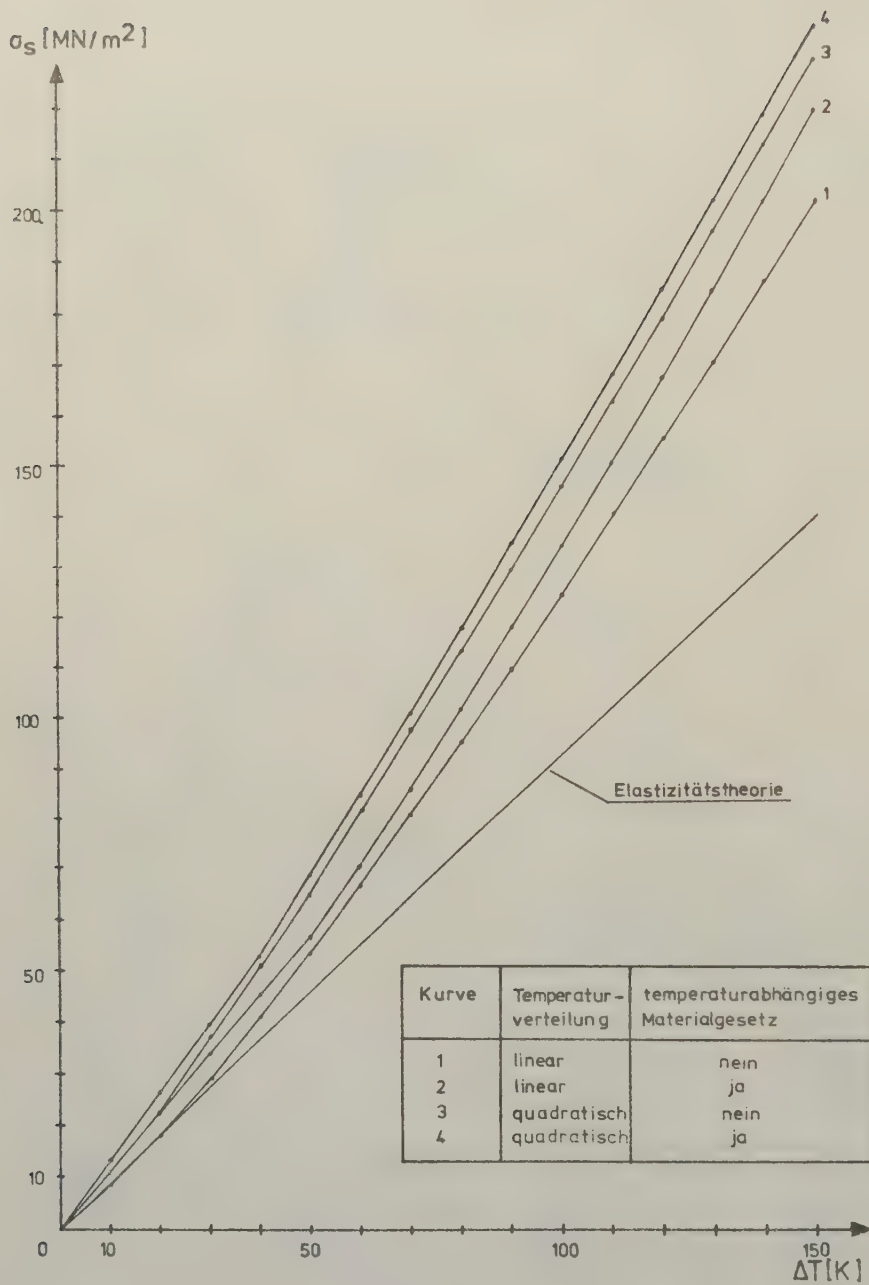


Bild 5.49b: Stahlspannungen der inneren Ringbewehrung in Abhängigkeit tiefer Temperaturen eines wassergesättigten Betons

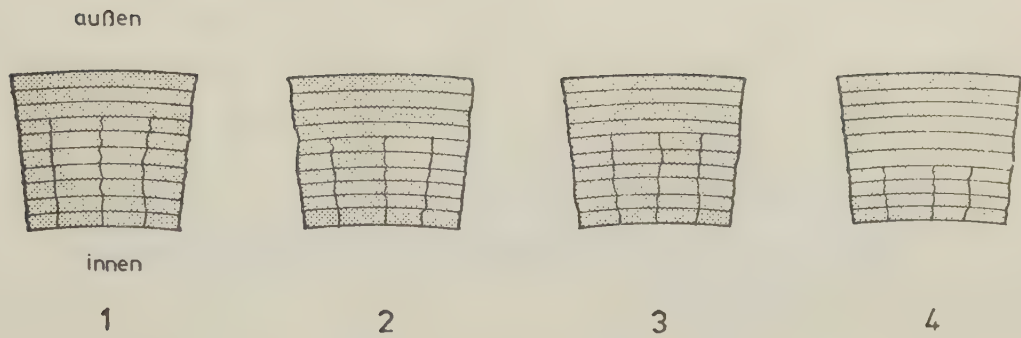


Bild 5.50: Rißtiefen in Abhängigkeit der 4 Methoden für einen Gradient von 180 K bei tiefen Temperaturen eines wassergelagerten Betons

5.4.4 Behälterausschnitt unter hohen Temperaturen und Innendruck

Um den Zusammenhang zwischen Zwang- und Lastschnittgrößen auch über den Bereich von Temperaturen größer als 200°C aufzuzeigen, wird im folgenden an einem Beispiel exemplarisch ein Interaktionsdiagramm zwischen Innendruck und Temperaturgradient ermittelt.

Gewählt wird das Ringsegment aus den Parameteruntersuchungen des letzten Abschnittes. Im Unterschied zu dem vorigen Beispiel beträgt die Dicke 40 cm, und die Betonzugfestigkeit wird nur noch mit $0,5 \text{ N/mm}^2$ angesetzt. Die Bewehrungsfläche beträgt je Richtung und Seite $12,5 \text{ cm}^2/\text{m}$ und weist eine Streckgrenze von 800 N/mm^2 auf. Das Element ist am oberen Rand frei und am unteren Rand in vertikaler Richtung gelagert angenommen. Es wird ein parabelförmiger Temperaturverlauf vorausgesetzt, wobei die Innenseite des Behälters erwärmt wird.

Das Ergebnis des Zusammenhangs zwischen Innendruck und zusätzlich aufnehmbarem Temperaturgradient ist in Bild 5.51 dargestellt. Das Versagen des Querschnittes erfolgt ausnahmslos durch Erreichen der Fließgrenze der Bewehrung auf der Behälteraußenseite, also der Zugseite. Man erkennt, daß im Fall der Belastung aus Innendruck der Querschnitt, d.h. die eingelegten Stahleinlagen einen Druck von 200 kN/m^2 aufnehmen können. Berücksichtigt man nur einen Temperaturlastfall, so ergibt sich bei der nichtlinearen Berechnung unter Berücksichtigung des temperaturabhängigen Materialverhaltens eine Grenze von 440 K.

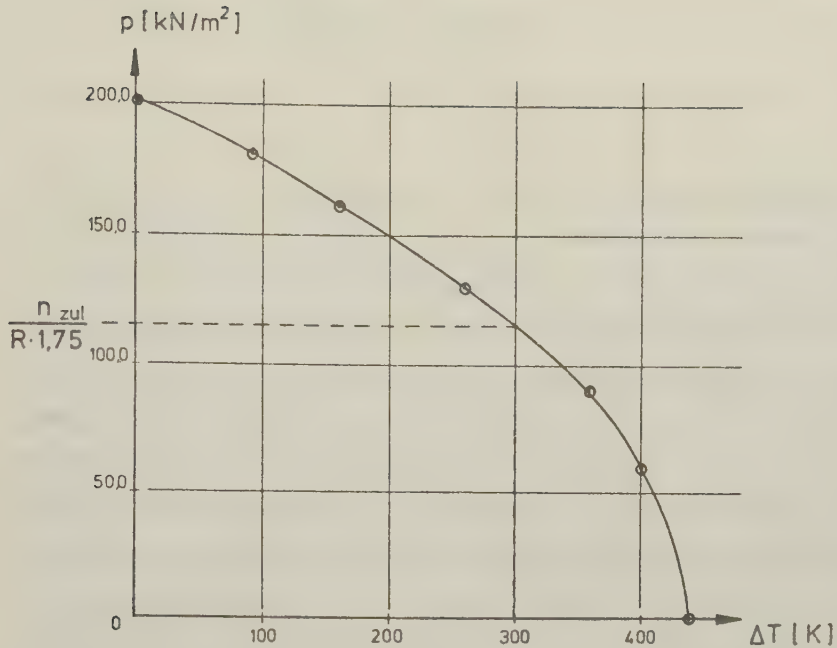


Bild 5.51: Interaktion zwischen Temperaturgradient und Innendruck

Wird die Bewehrung infolge Innendrucks nur zu 75 % ausgenutzt, so kann der Querschnitt Temperaturdifferenzen von bis zu 200 K aufnehmen, steht der Behälter nur unter der Hälfte des aufnehmbaren Druckes, so wird die Grenztragfähigkeit erst bei Temperaturunterschieden von ca. 340 K erreicht. Setzt man einen Sicherheitsbeiwert für den Stahl gegen Erreichen der Fließgrenze von 1,75 voraus, so kann der Querschnitt, ohne daß zusätzliche Bewehrung aus einer Bemessung für Temperatur vorhanden ist, Temperaturgradienten von 300 K aufnehmen. Dieser Sachverhalt ist in Bild 5.51 graphisch veranschaulicht. Bei höheren Bewehrungsgraden oder größeren zulässigen Stahlspannungen ergeben sich selbstverständlich andere Werte. Der Zusammenhang ist jedoch nicht linear. Es hat sich bei weiteren Unter-

suchungen gezeigt, daß bei dem durchgerechneten Beispiel die Variation der Querschnittsdicke ($d = 40; 50; 80 \text{ cm}$) keinen Einfluß auf die maximal aufnehmbare Temperatur hat.

In diesem Abschnitt ist der Zusammenhang zwischen Temperatur und Innendruck nur an einem einzigen Beispiel behandelt worden, ohne daß jedoch Einschränkungen bezüglich der Allgemeinheit der Theorie und des Rechenmodells in Kauf genommen werden mußten. Dieses Beispiel soll vielmehr nur zeigen, daß mit dem vorgestellten Modell die Möglichkeit geschaffen wurde, weitere systematische Parameterrechnungen durchzuführen, die es erlauben, eine Abschätzung der Auswirkungen von extremen Temperaturen auf Stahlbetonschalen hinsichtlich ihrer Tragfähigkeit zu treffen, was insbesondere für die Nutzanwendung in der Praxis bedeutsam sein dürfte.

6. Abschließende Betrachtungen

6.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente entwickelt, welches Stahlbetonbalken, -platten und -schalen, die neben äußeren Lasten verstärkt thermischen Beanspruchungen ausgesetzt sind, wirklichkeitsnah berechnet. Dabei wurde ein temperaturabhängiges Materialgesetz für den Werkstoff Stahlbeton berücksichtigt, mit dem der Spannungs- und Verformungszustand im elastischen und gerissenen Zustand bestimmt werden kann. Das erstellte Computer-Programm ist in der Lage, sowohl sehr tiefe als auch sehr hohe Temperaturbeanspruchungen, wie sie bei stationären und instationären Temperaturfeldern vorkommen, zu simulieren. Es berücksichtigt dabei das unterschiedliche Temperaturverhalten der Komponenten Beton und Stahl. Der Verbundbaustoff Stahlbeton wurde als Schichtensystem dargestellt, bestehend aus Beton und Stahl mit idealem Verbund. Die Nichtlinearität in den Materialeigenschaften wurde durch ein inkrementelles Tangentensteifigkeitsverfahren berücksichtigt, wobei der Gleichgewichtszustand jeweils iterativ bestimmt wurde. An einem zylindrischen Behälter wurden die Einflüsse aus Rißbildung und temperaturabhängigem Werkstoffverhalten auf das Tragverhalten von Stahlbetonschalen unter Zwangbeanspruchung rechnerisch untersucht.

6.2 Ergebnisse

Als wichtigste Ergebnisse der rechnerischen Untersuchungen von temperaturbeanspruchten Stahlbetonschalen lassen sich zusammenfassen:

- Mit dem dargestellten Materialgesetz wurden die bekannten experimentellen Ergebnisse der Materialforschung im Tieftemperaturbereich in einer technisch anwendbaren Form in der Berechnung von Stahlbetonschalen berücksichtigt. Dabei wurde aus Gründen der Vergleichbarkeit der gleiche Ansatz verwendet, wie er bereits für den Bereich hoher Temperaturen vorliegt.
- Die vorliegenden Ansätze zur Beschreibung der Materialeigenschaften von Beton und Stahl im Bereich hoher Temperaturen wurden, wenn auch teilweise in leicht modifizierter Form, als Eingabefunktionen für die numerische Untersuchung von Schalentragwerken verwertet, und ihre Anwendbarkeit auf diese Systeme wurde gezeigt.
- Das dieser Arbeit zugrunde liegende Modell ermöglicht es, beliebige dreidimensionale Temperaturfelder bei der Berechnung von Schalen zu berücksichtigen.
- Die numerische Erprobung des Rechenprogramms hat gezeigt, daß das vorgestellte Verfahren in der Lage ist, unter Berücksichtigung des temperaturabhängigen Materialverhaltens und des nichtlinearen Verhaltens von Stahlbeton den Abbau der Zwangsschnittkräfte vorherzusagen. Das entwickelte Modell ermöglicht damit eine wirklichkeitsnahe Beurteilung des Temperaturverhaltens von Stahlbetontragwerken und eine aus Sicherheitsbetrachtungen wichtige Aussage über den Eintritt örtlichen Versagens bei temperatur- und lastbeanspruchten Stahlbetonschalen.

- Die Temperaturspannungen, -schnittkräfte und -verformungen werden sowohl durch die Rißbildung als auch durch den Temperaturverlauf und den Temperaturbereich entscheidend beeinflußt. Es hat sich gezeigt, daß der primäre Einfluß auf die Zustandsgrößen nicht den temperaturabhängigen Materialkennwerten zukommt, sondern auf die Rißbildung und Steifigkeitsänderungen in bestimmten Strukturbereichen zurückzuführen ist. Die Schnittkräfte werden im Vergleich zur elastischen Rechnung durch die geringere Steifigkeit im gerissenen Zustand stark abgebaut. Im Tieftemperaturbereich gewinnt das temperaturabhängige Werkstoffverhalten größere Bedeutung als im Bereich hoher Temperaturen, da die mechanischen und thermischen Eigenschaften sich dafür besonders stark verändern.
- Für eine sehr genaue Beurteilung des Temperaturverhaltens ist eine Berechnung der Beton- und Stahlspannungen erforderlich, da es aufgrund von beliebigen Temperaturverteilungen, des unterschiedlichen Ausdehnungsverhaltens der beiden Komponenten Stahl und Beton und des Abbaus der Zwangbeanspruchung durch Rißbildung nicht ausreicht, generell nur die Schnittgrößen zu berechnen. Die Studien zeigen, daß die Anwendung eines Materialgesetzes für Stahlbeton, welches die Temperatur in dem Materialverhalten der beiden Partner Beton und Stahl nicht berücksichtigt, zur Bestimmung der Spannungen nicht als befriedigend betrachtet werden kann.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß mit den durchgeführten Berechnungen veranschaulicht wurde, daß mit dem vorgestellten Modell ein Hilfsmittel geschaffen wurde, um die Tragfähigkeit von mittel-

dicken Schalentragerwerken aus Stahlbeton unter Temperaturbeanspruchung mit und ohne gleichzeitiger Einwirkung äußerer Lasten zu bestimmen. Eine derartige Aussage kann bei Behältern, bei denen die Temperaturbeanspruchung in den Vordergrund tritt, im Rahmen einer Sicherheitsbetrachtung besondere Bedeutung bekommen. Für die Praxis können damit Wege aufgezeigt werden, wie thermisch beanspruchte Behälter behandelt werden können.

BEZEICHNUNGEN

Geometrische Größen:

t_s	idealisierte Dicke der Bewehrungslagen
A_s	Querschnittsfläche Bewehrungsstab
a	Abstand der Bewehrungsstäbe
μ	Bewehrungsgrad in %
d, h	Elementdicke
A	Fläche
V	Volumen
R	Radius
a, b	Längen
φ, θ	Winkel
t	Abstand
$\ddot{u}$	Betonüberdeckung

Physikalische Größen:

T	Temperatur
ΔT	Temperaturdifferenz
A^i	innere Arbeit

Indizes, mathematische Symbole, Koordinatensysteme:

$()_0$	Index für Bezugswert
$i, j, \dots$	Indizes zur Elementbeschreibung
$x()$	Funktion einer Materialkenngröße von ()
$f()$	Funktion von ()
x, y	kartesische Koordinaten
λ	Flächenkoordinaten
$\delta()$	Variation von ()
e	Index für lokale Größen

a	Index für globale Größen
$(-)$	lokal
M, m	Indizes der Membrangrößen
B, b	Indizes der Biegegrößen
$()_o$	oben
$()_u$	unten
$()'$	Bezug auf gedrehtes Koordinatensystem
$\Delta()$	Inkrement von $()$
$()_I$	Bezug auf Zustand I

Materialgrößen Beton:

B	Betongüte
β	Druckfestigkeit
β_p	Prismenfestigkeit
β_{ws}	Würfelserienfestigkeit
β_z	Zugfestigkeit
E_b	Elastizitätsmodul
α_T	Temperaturausdehnungskoeffizient
σ_1, σ_2	Hauptspannungen
ν	Querdehnzahl
G	Gleitmodul
ϵ_b	Betondehnung
σ_b	Betonspannung

Materialgrößen Stahl:

BSt	Betonstahlgüte
St	Spannstahlgüte
$\sigma_{0,2}$	Streckgrenze
β_s	Streckgrenze
σ_B	Zugfestigkeit
E_s	Elastizitätsmodul
α_T	Temperaturausdehnungskoeffizient
ϵ_s	Stahldehnung

Matrizen und Vektoren:

$[\]$	Matrix
$[\]^{-1}$	inverse Matrix
$[\]^T$	transponierte Matrix
$\{ \}$	Vektor
$\underline{E}$	Elastizitätsmatrix
$\underline{I}_0$	Transformationsmatrix der Spannungen
$\underline{I}_\varepsilon$	Transformationsmatrix der Dehnungen
$\underline{u}$	Vektor der Verschiebungen in x-Richtung
$\underline{v}$	Vektor der Verschiebungen in y-Richtung
$\underline{\phi}$	Vektor der Ansatzfunktion
$\underline{\varepsilon}$	Vektor der Dehnungen
$\underline{\chi}$	Vektor der Krümmungen
$\underline{\varepsilon}_0$	Vektor der Anfangsdehnungen
$\underline{\sigma}$	Vektor der Spannungen
$\underline{\sigma}_0$	Vektor der Anfangsspannungen
$\underline{v}$	Knotenverschiebungen des Elementes
$\underline{V}$	Systemfreiheitsgrade
$\underline{H}$	Matrix
$\underline{G}$	Operatorenmatrix
$\underline{k}$	Elementsteifigkeitsmatrix
$\underline{K}$	Systemsteifigkeitsmatrix
$\underline{g}$	Elementknotenkräfte
$\underline{Q}$	globale Knotenkräfte
$\underline{n}$	Normalkräfte
$\underline{m}$	Momente
$\underline{e}_i$	Einheitsvektoren der lokalen Koordinaten
$\underline{I}_{eg}$	Transformationsmatrix zwischen globalen Raumkoordinaten und lokalen Elementkoord.
$\underline{I}_{ag}^i$	Transformationsmatrix zwischen globalen Raumkoordinaten und krummlinigen Flächenk.
$\underline{I}_{ea}$	Transformationsmatrix zwischen krummlinigen Flächenkoordinaten und lokalen Koord.
$\underline{I}$	Transformationsmatrix

Vorzeichenregelung:

Spannungen : Zug +, Druck -

Verzerrungen : Längung +, Stauchung -

Abweichungen und Erweiterungen sind im Text deutlich gekennzeichnet. Ihre Bedeutung geht unmittelbar aus dem Text hervor.

LITERATURVERZEICHNIS

Abkürzungen:

ACI	American Concrete Institut
ASCE	American Society of Civil Engineers
ASP	Association scientifique de la precontrainte
DAfStb	Deutscher Ausschuß für Stahlbeton
FIP	Federation Internationale de la Precontrainte
IASS	International Association for Shell and Spatial Structures
PCA	Portland Cement Association
RILEM	Reunion Internationale des Laboratoires d'Esseais et de Recherches sur les Materiaux
ZAMM	Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

- /1/ FISCHER, Rudolf: Über das Verhalten von Zementmörtel und Beton bei höheren Temperaturen. DAfStb Heft 214, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1970

- /2/ HARMATHY, T.Z. and BERNDT, J.E.: Hydrated portland cement and lightweight concrete at elevated temperatures. in: ACI-Journal, No. 63-4 (1966), p.93 ff.

- /3/ SCHNEIDER, Ulrich: Zur Kinetik festigkeitsmindernder Reaktionen in Normalbetonen bei hohen Temperaturen. Dissertation TU Braunschweig, Fakultät für Bauwesen, Braunschweig 1973

- /4/ KLINGSCH, Wolfram: Traglastberechnung instationär thermisch belasteter schlanker Stahlbetondruckglieder mittels zwei- und dreidimensionaler Diskretisierung. Dissertation TU Braunschweig, Fakultät für Bauwesen, Braunschweig 1975

- /5/ HAKSEVER, Ataman: Zur Frage des Trag- und Verformungsverhaltens ebener Stahlbetonrahmen im Brandfall. Dissertation TU Braunschweig, Fakultät für Bauwesen, Braunschweig 1977

- /6/ LENTZ, A.E. and MONFORE, G.E.: Physical properties of concrete at very low temperatures. in: Journal PCA, Vol. 4 No. 2 (1962), p. 33-39

- /7/ MOSKVIN, V.M., KAPTJEN, M.M. und ANTONOV, L.N.: Einfluß von Temperaturen unterhalb des Frostbereiches auf die Festigkeit und die elastoplastischen Eigenschaften von Beton (in russisch). in: Beton i zelezobeton 13, Nr. 10 (1976), S. 18-21

- /8/ WISCHERS, Gerd und DAHMS, Jürgen: Das Verhalten des Betons bei sehr niedrigen Temperaturen. Beton-Verlag GmbH, Düsseldorf 1970

- /9/ KORDINA, Karl und NEISECKE, Jürgen: Die Ermittlung der Gebrauchseigenschaften von Beton und Spannstahl bei extrem tiefen Temperaturen. in: Betonwerk + Fertigteil-Technik, Heft 4/1978, S. 191-197

- /10/ HELLER, W. und STOLTE, E.: Eigenschaften und Verhalten vergüteter Spannstähle bei sehr tiefen Temperaturen. in: Annales de l'institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics 23 (1970), Nr. 266, S. 94-98

- /11/ HAND, Frank R., PECKNOLD, David A. and SCHNOBRICH, William C.: A layered finite element nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells. University of Illinois, Urbana, Illinois, Aug. 1972

- /12/ LINK, Jürgen, MEHLHORN, Gerhard und SCHÄFER, Horst: Berechnung von dünnen Stahlbetonplatten bei Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens. Forschungsberichte der Arbeitsgruppe Massivbau der TH Darmstadt Nr. 1 (1972)

- /13/ WEGNER, Rainer: Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit nichtlinearen Materialgesetzen im gerissenen Zustand - Finite-Element-Methode. Inst. f. Statik d. TU Braunschweig, Bericht Nr. 74-11, Braunschweig 1974
- /14/ EIBL, Josef und IVANYI, György: Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton. DAfStb Heft 260, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1976
- /15/ LIN, Cheng-Shung: Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs and shells. UC-SESM-Report No. 73-7, Berkeley, California, April 1973
- /16/ KABIR, Ahmad F.: Nonlinear analysis of reinforced concrete panels, slabs and shells for time-dependent effects. UC-SESM-Report No. 76-6, Berkeley, California, Dec. 1976
- /17/ MÜLLER, Günter: Nonlinear analysis of reinforced concrete hyperbolic shells. UC-SESM-Report No. 77-6, Berkeley, California, Oct. 1977
- /18/ RAHMAN, Fazlur und KALANKAMARY, George P.: Thermal stress analysis of continuous skew bridge. in: ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 105, No. St 7 (July 1979), p. 1525-1541
- /19/ GREEN, A.E. and ZERNA, Wolfgang: Theoretical elasticity. Clarendon Press, Oxford 1968
- /20/ ZERNA, Wolfgang: Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen. in: Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band 18 (1967), S. 52-71

- /21/ ZERNA, Wolfgang: A new formulation of the theory of elastic shells. in: IASS-Bulletin No. 36 (1968), p. 61-76

- /22/ KRÄTZIG, Wilfried B.: Eine bestmögliche erste Approximation in der linearen Theorie elastischer Schalen. in: Allgemeine Schalentheorien, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 73-1, Bochum 1973

- /23/ HARBORD, R.: Berechnung dünner Schalentragwerke mit finiten Elemente - Vergleichende Untersuchung unterschiedlicher Diskretisierungsvarianten. Inst. f. Statik d. TU Braunschweig, Bericht Nr. 77-21, Braunschweig 1977

- /24/ POPOVICS, Sandor: A review of stress-strain relationships for concrete. in: ACI Journal, Vol. 67 No. 3 (1970), p. 243-248

- /25/ YOUNG, L.E.: Simplifying ultimate flexural theory by maximizing the moment of the stress block. in: ACI Journal, Vol. 57 No. 5 (1960), p. 549-556

- /26/ STURMAN, G.M., SHAH, S.P. and WINTER, G.: Effect of flexural strain gradients on microcracking and stress-strain behaviour of concrete. in: ACI Journal, Vol. 62 No. 7 (1965), p. 805-822

- /27/ SAENZ, L.P.: Equation for the stress-strain curve of concrete. in: ACI Journal, Vol. 61 No. 9 (1964), p. 1229-1235

- /28/ DESAYI, P. and KRISHNAN, S.: Equation for the stress-strain curve of concrete. in: ACI-Journal, Vol. 61 No. 3 (1964), p. 345-350

- /29/ KUPFER, Helmut B.: Das nicht-lineare Verhalten des Betons bei zweiachsiger Beanspruchung. in: Beton- und Stahlbetonbau Heft 11 (1973), S. 269-274
- /30/ LIU, T.C.Y., NILSON, A.H. and SLATE, F.U.: Biaxial stress-strain relations for concrete. in: ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 98 No. ST 5 (1972), p. 1025-1034
- /31/ LINK, Jürgen: Eine Formulierung des zweiaxialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten. Dissertation TH Darmstadt, Fachbereich KIB, Darmstadt 1975
- /32/ DIN 1045: Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung, Fassung Dez. 1978
- /33/ JOHANSEN, Randulf and BEST, Cecil H.: Creep of concrete with and without ice in the system. in: RILEM-Bulletin No. 16 (1962), p. 47-57
- /34/ MILOVANOV, F.A.: Einfluß der Temperatur auf das Verhalten von Spannbetonkonstruktionen (in russisch). in: Beton i zelezobeton 16 Nr. 5 (1970), S. 15-18
- /35/ ROSTASY, F.S., SCHNEIDER, U. und WIEDEMANN, G.: Ein Beitrag zum Tieftemperaturverhalten von Zementmörtel und Beton. in: Kordina-Festschrift 1979, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1979
- /36/ ROSTASY, F.S., SCHNEIDER, U. and WIEDEMANN, G.: Behaviour of mortar and concrete at extremely low temperatures. in: Cement and Concrete Research, Vol. 9 No. 3 (1979), p. 365-376

- /37/ SEEKAMP, H., BECKER, W., STRUCK, W., KORDINA, K. und WIERIG, H.-J.: Verhalten von Stahlbeton und Spannbeton bei Brand. DAfStb Heft 162, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1964

- /38/ DANNENBERG, J.: Festigkeitsuntersuchung des Bewehrungsstahles bei 600 °C. DAfStb Heft 132, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1959

- /39/ REHM, G. und NÜRNBERGER, U.: Zur Frage der Dauerhaltbarkeit von Spannstählen. in: Betonwerk + Fertigteil-Technik, Heft 9 (1976), S. 426-434

- /40/ BRUGGELING, A.S.G.: Neue Entwicklungen bei Spannstählen und -systemen. in: Betonwerk + Fertigteil-Technik, Heft 4 (1978), S. 184-190

- /41/ ROSTASY, F.S. und WIEDEMANN, G.: Festigkeit und Verformung von Beton bei sehr tiefer Temperatur. in: Beton, Heft Nr. 2 (1980), S. 54-59

- /42/ YAMANE, S., KASAMI, H. and OKUNO, T.: Properties of concrete at very low temperatures. in: ACI Special Publication SP 55, Detroit 1978

- /43/ EBBINGHAUS, Peter: Herleitung eines Verfahrens zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter Berücksichtigung der Rißentwicklung. Dissertation TH Aachen, Fakultät für Bauwesen, Aachen 1975

- /44/ BEHAR, I.: Influence of extreme temperatures on the properties of prestressing steel. in: FIP Symposium for prestressing, Madrid 1968

- /45/ LIN, Cheng-Shung and SCORDELIS, Alexander C.: Nonlinear analysis of reinforced concrete shells of general form. in: ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 101 No. ST 3 (1975), p. 523-538
- /46/ BRONSTEIN, I.N. und SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main 1974
- /47/ SCHMID, Günther: Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen. in: ZAMM 52 (1972), S. 461-469
- /48/ BEEM, H., BRINK, K. und LECHTLEITNER, B.: FEMAS - Finite Element Moduln allgemeiner Strukturen. Interner Arbeitsbericht, Inst. f. KIB, Lehrstuhl III, Ruhr-Universität Bochum, Bochum 1981
- /49/ MÜLLER, Günter: Numerical problems in nonlinear analysis of reinforced concrete. UC-SESM-Report No. 77-5, Berkeley, California, Sept. 1977
- /50/ SCHRADER, K.-H.: Die Deformationsmethode als Grundlage einer problemorientierten Sprache. Bibliogr. Institut, Mannheim/Zürich, BI-HTB Band 830, 1969
- /51/ ZIENKIEWICZ, O.C.: Methode der finiten Elemente. Carl Hanser Verlag, München 1975
- /52/ CLOUGH, R.W. and TOCHER, J.L.: Finite Element stiffness Matrix for Analysis of Plate Bending. in: Proceedings of the conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1965

- /53/ CLOUGH, R.W. and FELIPPA, C.A.: A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending. in: Proceedings of 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1968

Lebenslauf

Geburtsdatum und -ort: 8. September 1953 in Gelsenkirchen

Schulbildung: April 1960 - März 1964 Volksschule
"Am Görtzhof" in Gelsenkirchen-
Buer
April 1964 - Mai 1972 Max-Planck-
Gymnasium in Gelsenkirchen-Buer
mit Abschluß Reifeprüfung

Wehrdienst: Juli 1972 - März 1974 Reserveoffi-
zierausbildung bei der Luftwaffe
mit Abschluß (Dienstgrad: Leutnant
der Reserve)

Studium: Oktober 1974 - Juni 1979 Studium
des Bauingenieurwesens (Fachrich-
tung Konstruktiver Ingenieurbau)
an der Ruhr-Universität Bochum
mit Abschluß Diplomprüfung (Ge-
samturteil: mit Auszeichnung be-
standen)
April 1975 - Juni 1979 Stipendiat
des Wilhelm-Zangen-Fonds der MAN-
NESMANN AG in Düsseldorf
Dezember 1979 Preis der Ruhr-Uni-
versität Bochum 1979

Berufliche Tätigkeit: Juli 1979 - September 1981 wissen-
schaftlicher Mitarbeiter von
Prof.Dr.-Ing.Dr.-Ing. E.h. W. Zerna
am Institut für Konstruktiven In-
genieurbau der Ruhr-Universität
Bochum
Seit Oktober 1981 beratender In-
genieur bei der Zerna, Schnellen-
bach und Partner GmbH in Bochum

